Om Eksponensialmatriser og Jordan normalform

av

Svenn Olav Valmestadrød
Veileder: Erik Bédos

MASTEROPPGAVE

for graden

Master i Realfag med fordypning i matematikk

(Master of Science)

Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Oslo

Desember 2012

Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Oslo

Innhold

Kapittel 1

Eksponensialmatriser: definisjoner og egenskaper

1.1 Innledning

Vi skal i denne oppgaven se på eksponentialmatriser og Jordan normalform. Teorien om eksponentialmatriser brukes blant annet til NMR-spektroskopi, som er en metode for å undersøke molekylers struktur og deres romlige og elektroniske oppbygning[8]. I all hovedsak har allikevel teorien om eksponetialmatrisefunksjoner hatt teoretisk verdi for matematikere. Vi skal se at det kan være en utfordring å finne eksponentaialmatrisen e^{At} for en gitt kvadratisk matrise A og $t \in \mathbb{R}$. En metode som forenkler beregningen er ved å bruke at $A = PJP^{-1}$ for en invertibel matrise P og en Jordan matrise J. Vi skal se at $e^A = Pe^J P^{-1}$, og at det er enkelt å beregne e^J. Problemet med denne metoden er at det er vanskelig å finne en Jordan normalform for A.

Ved å kjenne Jordan normalformen til A forenkles flere beregninger i lineær algebra, og er derfor veldig nyttig. Det er altså ikke bare i beregningen av e^A vi har behov for å kjenne Jordan normalformen til A. Det viser seg at det går ann å snu på problemstillingen. Hvis man først beregner eksponentialmatrisen e^{At} kan man fra den finne en Jordan normalform for A.

1.2 Definisjon av eksponensialmatriser[1]

Definisjonen av en eksponensialmatrise er basert på Taylorrekken til e^x rundt $x = 0$ gitt ved

$$e^x = \lim_{l \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{l} \frac{x^k}{k!} \right).$$

Etter å ha definert eksponsialmatriser, skal vi se at mange av egenskapene til eksponentialfunksjonen $x(t) = e^z$ for en $z \in \mathbb{C}$ og $t \in \mathbb{R}$ er ivaretatt.

[1]Kilder: [4, 10].

Definisjon 1.1 (EKSPONENSIALMATRISER)**.** For en $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ er eksponensialmatrisen e^A definert ved:

$$e^A = \lim_{l\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{l}\frac{A^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}.$$

Her er $A^0 = I = O^0$.

Det første vi må gjøre etter å ha sett Definisjon 1.1 er å vise at eksponensialmatriser nå er veldefinert.

Lemma 1.1. *La $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A = [a_{ij}^{(1)}]$, og $b = max\left\{\left|a_{ij}^{(1)}\right| \mid i,j \in \{1,...,n\}\right\}$. For $m \geq 2$, sett $A^m = [a_{ij}^{(m)}]$. For hver $k \in \mathbb{N}$ gjelder da at*[2]

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq (nb)^k,$$

for alle $i,j \in \{1,...,n\}$.

Bevis. Vi gir et bevis ved induksjon på k. For $k = 1$ er det opplagt sant utifra definisjonen av b. Anta nå at lemmaet er sant for $k = q-1$, hvor $q \geq 2$. Skal vise at det da må være sant for $k = q$ også. Siden

$$a_{ij}^{(q)} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(1)} a_{lj}^{(q-1)},$$

får vi ved vår induksjonsantagelse at

$$|a_{ij}^{(q)}| = \left|\sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(1)} a_{lj}^{(q-1)}\right| \leq \sum_{l=1}^{n} |a_{il}^{(1)}||a_{lj}^{(q-1)}| \leq \sum_{l=1}^{n}(b)(n^{q-1}b^{q-1}) = \sum_{l=1}^{n} n^{q-1}b^q = (nb)^q.$$

Dette beviser lemmaet. □

Teorem 1.2. *Grensen i Definisjon 1.1 eksisterer for alle A.*

Skal bruke at $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{k!}$ konvergerer for alle $c \in \mathbb{C}$. Ideen bak beviset er å vise at alle elementer i e^A konvergerer, ved å vise at et tilfeldig element må konvergere.

[2] I denne oppgaven vil $\mathbb{N}$ betegne mengden $\{1,2,...\}$, mens $\mathbb{N}_0$ betegner mengden $\{0,1,2,...\}$.

Bevis. La $i, j \in \{1, ..., n\}$. Fra Lemma 1.1 vet vi at

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq (nb)^k. \tag{1.1}$$

Som igjen gir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{ij}^{(k)}|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nb)^k}{k!}. \tag{1.2}$$

Men vi vet at $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nb)^k}{k!}$ konvergerer. Så vi kan konkludere at også $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{ij}^{(k)}|}{k!}$ konvergerer. Dvs. at $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}$ er absolutt konvergent, og teoremet er bevist. □

Legg merke til at vi da får at $e^O = I$, der O er en kvadratisk nullmatrise:

$$e^O = O^0 + O^1 + \frac{O^2}{2!} + \frac{O^3}{3!} + \ldots = I + O + O + O + \ldots = I.$$

Som tilsvarer at $e^0 = 1$.

1.3 Nilpotente eksponenter[3]

Per definisjon er eksponensialmatriser en uendelig sum av matriser, og kan derfor være vanskelig og tidkrevende å beregne. I tilfellet med e^O derimot trengte vi heldigvis ikke å beregne en uendelig matrisesum. Fordi $O^k = O$ for alle $k \in \mathbb{N}$ blir alle leddene utenom det første O. Når vi jobber med vanlige reelle eller komplekse tall finnes det ingen andre a enn 0, som er slik at $a^k = 0$ for en $k \in \mathbb{N}$. Blant matrisene derimot finnes det nilpotente matriser. Hvis A er nilpotent, så finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik at $A^k = O$ for alle $k > N$. For en slik nilpotent A forenkles beregningen av e^A til å finne $\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$.

Definisjon 1.2 (NILPOTENTE MATRISER)**.** En kvadratisk matrise A kalles nilpotent av grad $k \in \mathbb{N}$ hvis $A^k = O$, men $A^{k-1} \neq O$.

Eksempel 1.1. La $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Da er

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[3]Kilder: [1, 2, 4].

Vi sier altså at A er nilpotent av grad 3 fordi $A^3 = O$, men $A^2 \neq O$. Regner vi nå ut e^A får vi

$$e^A = I_3 + A + \frac{A^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Vi skal senere se at enhver triangulær matrise $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hvor alle diagonalelementene er 0 er nilpotent av grad n eller mindre.

Eksempel 1.2.

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix},$$

er nilpotent av grad 2 fordi $B^2 = O$. Det betyr at

$$e^B = I_2 + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

■

En nilpotent matrise er altså ikke nødvendigvis en triangulær matrise hvor alle diagonalelementene er 0. Cayley-Hamilton teoremet[4] sier at enhver matrise A løser sitt eget karakteristiske polynom. En konsekvens av Cayley-Hamilton er at enhver matrise som har 0 som eneste egenverdi er nilpotent. Den omvendte implikasjonen kan også vises.

1.4 Differensiallingninger med eksponensialmatriser[5]

En attraktiv egenskap ved exponentialfunksjonen $x(t) = e^{at}$ er at $x'(t) = ae^{at}$. Vi skal se at denne egenskapen er bevart når vi ser på eksponensialmatrisefunksjoner, men først må vi se litt på hva som menes med at en matrisefunksjon $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n \times n}$ er deriverbar.

Definisjon 1.3 (Deriverbare Matrisefunksjoner)**.** La $F(t) = \left[f_{ij}(t)\right]$ være en matrisefunksjon. Anta at for alle $i, j \in \mathbb{N}$ så er f_{ij} definert i et åpent intervall om punktet $a \in \mathbb{R}$. Dersom grenseverdien

$$\lim_{t \to a} \frac{f_{ij}(t) - f_{ij}(a)}{t - a}$$

eksisterer for alle f_{ij}, sier vi at F er deriverbar i a. Vi skriver

$$F'(a) = \left[f'_{ij}(a)\right] = \left[\lim_{t \to a} \frac{f_{ij}(t) - f_{ij}(a)}{t - a}\right].$$

[4] Avsnitt 4.1 i [2] og avsnitt 7.11 i [1]

[5] Denne seksjonen bygger på seksjon 7.6 og 7.7 i [1]. [10] er også en kilde.

Derivasjonsregler. *Anta at funksjonene F og G er deriverbare i punktet $a \in \mathbb{R}$, og at $c \in \mathbb{C}$ er en konstant. Da er funksjonene cF, $F+G$, $F-G$, FG deriverbare i a. Deres deriverte er gitt ved:*

I $(cF)'(a) = cf'(a)$

II $(F+G)'(a) = F'(a) + G'(a)$

III $(F-G)'(a) = F'(a) - G'(a)$

IV $(FG)'(a) = F'(a)G(a) + F(a)G'(a)$

Da er vi klare for å se hva som skjer når vi deriverer en eksponentialmatrisefunksjon.

Teorem 1.3. *La $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, og definer $E(t) = e^{At}$, for hver $t \in \mathbb{R}$. Da er funksjonen $E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n \times n}$ deriverbar for alle $t \in \mathbb{R}$, og den deriverte er gitt ved*

$$E'(t) = AE(t) = E(t)A.$$

Bevis. Fra Definisjon 1.1 ser vi at

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

La $A = \left[a_{ij}^{(1)}\right]$, og $A^k = \left[a_{ij}^{(k)}\right]$. Da er ij-elementet i $\frac{t^k A^k}{k!}$ gitt ved $\frac{t^k a_{ij}^{(k)}}{k!}$. Derav følger det at

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left[\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}\right]. \tag{1.3}$$

Hvert element på høyre side av (1.3) er en potensrekke på t, som konvergerer for alle t. Da eksisterer den deriverte for alle t, og er gitt ved den deriverte rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kt^{k-1}}{k!} a_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k+1)}.$$

Dette viser at den deriverte $E'(t)$ eksisterer og er gitt ved matrise rekka

$$E'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^{k+1}}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right) A = E(t)A.$$

Her brukte vi at $A^{k+1} = A^k A$. Siden A kommuterer med A^k kunne vi også brukt at $A^{k+1} = AA^k$ for å få relasjonen $E'(t) = AE(t)$ og teoremet er bevist. $\square$

Korollar 1.4. *La $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $t \in \mathbb{R}$. Da kommuterer A og e^{At}.*

Bevis. Følger direkte fra Teorem 1.3 ved at $AE(t) = E(t)A$, der $E(t) = e^{At}$. □

Teorem 1.5. *La $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, og $t \in \mathbb{R}$. Da er e^{At} invertibel (ikke singulær), med*

$$\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}.$$

Bevis. La F være matrise funksjonen definert for alle $t \in \mathbb{R}$ ved

$$F(t) = e^{At}e^{-At}.$$

Vi skal bevise at $F(t) = I$ ved å først vise at $F'(t) = O$. Ved å derivere F som et produkt, og bruke resultatene fra Teorem 1.3 og Korollar 1.4, får vi at

$$\begin{aligned} F'(t) &= e^{At}(e^{-At})' + (e^{At})'e^{-At} &&= e^{At}(-Ae^{-At}) + Ae^{At}e^{-At} \\ &= -Ae^{At}e^{-At} + Ae^{At}e^{-At} &&= O. \end{aligned}$$

Derfor må $F(t)$ være konstant. Men $F(0) = e^{A0}e^{-A0} = I$, så $F(t) = I$ for alle t. Dette beviser teoremet. □

Dette resultatet tilsvarer at $e^{zt}e^{-zt} = 1$ for en $z \in \mathbb{C}$ og $t \in \mathbb{R}$.

Eksempel 1.3. La $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Da er A som i Eksempel 1.1, og $e^A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Videre er også $-A$ nilpotent av grad 3, så vi har vi at

$$e^{-A} = I_3 + (-A) + \frac{(-A)^2}{2} = I_3 - A + \frac{A^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Regner vi nå ut e^Ae^{-A} får vi

$$e^Ae^{-A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Teorem 1.6. *La $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Betrakt initialverdiproblemet $F(0) = B$ for matriseligningen $F'(t) = AF(t)$, der $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$. Dette problemet har en entydig løsning som er gitt ved*

$$F(t) = e^{At}B \text{ for alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bevis. Først legger vi merke til at $F(t) = e^{At}B$ er en løsning, siden $F(0) = B$ og

$$F'(t) = (e^{At})'B = Ae^{At}B = AF(t).$$

La nå F være en tilfeldig løsning, og sett

$$G(t) = e^{-At}F(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Deriverer vi dette produktet får vi for alle $t \in \mathbb{R}$

$$G'(t) = e^{-At}F'(t) - Ae^{-At}F(t) = e^{-At}AF(t) - e^{-At}AF(t) = O.$$

Derfor er $G(t)$ en konstant matrise for alle t, og derfor er

$$G(t) = G(0) = e^{O}F(0) = IB = B,\ t \in \mathbb{R}.$$

Vi får altså at

$$e^{-At}F(t) = B,\ t \in \mathbb{R}.$$

Ganger vi med e^{At} fra venstre og bruker Teorem 1.5 får vi

$$F(t) = e^{At}B,\ t \in \mathbb{R},$$

som beviser teoremet. □

Helt tilsvarende kan vi vise at $F(t) = Be^{At}$ er den unike løsningen av initialverdiproblemet

$$F'(t) = F(t)A, F(0) = B.$$

Teorem 1.7. *Hvis matrisene $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kommuterer, altså hvis $AB = BA$, så er*

$$e^{(A+B)} = e^{A}e^{B}.$$

Bevis. Fra relasjonen $AB = BA$ følger det at

$$A^2B = A(AB) = A(BA) = (AB)A = (BA)A = BA^2,$$

som betyr at B kommuterer med A^2. Ved induksjon ser vi at B kommuterer med A^k for alle $k \in \mathbb{N}$. Ved å skrive e^{At} som en potensrekke ser vi at B også kommuterer med e^{At} for alle reelle t. La nå F være matrise-funksjonen definert ved

$$F(t) = e^{(A+B)t} - e^{At}e^{Bt}, t \in \mathbb{R}.$$

Deriverer vi $F(t)$ og bruker at B kommuterer med e^{At} får vi

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B)e^{(A+B)t} - Ae^{At}e^{Bt} - e^{At}Be^{Bt} \\ &= (A+B)e^{(A+b)t} - (A+B)e^{At}e^{Bt} \qquad = (A+B)F(t). \end{aligned}$$

Fra Teorem 1.6 får vi da at

$$F(t) = e^{(A+B)t}F(0).$$

Men $F(0) = e^O - e^Oe^O = I - I = O$, så $F(t) = O$ for alle t. Dette betyr at

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$$

for alle $t \in \mathbb{R}$. Ved å sette $t = 1$ har vi bevist teoremet. □

Dette resultatet tilsvarer at $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ for $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Resultatet er derimot ikke like sterkt da det kreves at eksponentene kommuterer. For å se litt mer intuitivt hva som skjer, og hvorfor vi må kreve at eksponentene kommuterer tar vi med følgende, noe uformelle, utregning hvor vi antar at A og B kommuterer:

$$e^Ae^B = Ie^B + Ae^B + \frac{A^2}{2!}e^B + \frac{A^3}{3!}e^B + \ldots + \frac{A^n}{n!}e^B + \ldots$$

$$=$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
I & + & B & + & \frac{B^2}{2!} & + & \frac{B^3}{3!} & + & \ldots & + & \frac{B^n}{n!} & + & \ldots \\
A & + & AB & + & A\frac{B^2}{2!} & + & A\frac{B^3}{3!} & + & \ldots & + & A\frac{B^n}{n!} & + & \ldots \\
\frac{A^2}{2!} & + & \frac{A^2}{2!}B & + & \frac{A^2}{2!}\frac{B^2}{2!} & + & \frac{A^2}{2!}\frac{B^3}{3!} & + & \ldots & + & \frac{A^2}{2!}\frac{B^n}{n!} & + & \ldots \\
\frac{A^3}{3!} & + & \frac{A^3}{3!}B & + & \frac{A^3}{3!}\frac{B^2}{2!} & + & \frac{A^3}{3!}\frac{B^3}{3!} & + & \ldots & + & \frac{A^3}{3!}\frac{B^n}{n!} & + & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots \\
\frac{A^n}{n!} & + & \frac{A^n}{n!}B & + & \frac{A^n}{n!}\frac{B^2}{2!} & + & \frac{A^n}{n!}\frac{B^3}{3!} & + & \ldots & + & \frac{A^n}{n!}\frac{B^n}{n!} & + & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

$$=$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
I & + & B & + & \frac{B^2}{2!} & + & \frac{B^3}{3!} & + & \ldots & + & \frac{B^n}{n!} & + & \ldots \\
 & & A & + & \frac{2AB}{2!} & + & \frac{3AB^2}{3!} & + & \ldots & + & \frac{nAB^{n-1}}{n!} & + & \ldots \\
 & & & & \frac{A^2}{2!} & + & \frac{3A^2B}{3!} & + & \ldots & + & \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}A^2B^{n-2}}{n!} & + & \ldots \\
 & & & & & & \frac{A^3}{3!} & + & \ldots & + & \frac{\frac{n!}{3!(n-3)!}A^3B^{n-3}}{n!} & + & \ldots \\
 & & & & & & & & \ddots & & \vdots & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & \frac{A^n}{n!} & + & \ldots
\end{array}$$

$$= \qquad \text{Bruker at } AB = BA.$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
I & + & A+B & + & \frac{(A+B)^2}{2!} & + & \frac{(A+B)^3}{3!} & + & \ldots & + & \frac{(A+B)^n}{n!} & + & \ldots
\end{array}$$

$$=$$

$$e^{A+B}.$$

Denne utregningen kan formaliseres, men beviset i Teorem 1.7 er kortere og mer elegant.

Til slutt i avsnittet tar vi med et eksempel der $e^{A+B} \neq e^Ae^B$.

Eksempel 1.4. La $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Da er

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = BA \text{ og } A+B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da er både A, B og $A+B$ nilpotente av grad 3 fordi de er øvre triangulære 3×3 matriser hvor alle diagonalelementer er 0. Fra Eksempel 1.1 vet vi at

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Videre får vi

$$e^B = I_3 + B + \frac{B^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da er

$$e^A e^B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Men

$$e^{A+B} = I_3 + (A+B) + \frac{(A+B)^2}{2} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq e^A e^B.$$

■

Dette viser at hvis $AB \neq BA$, så trenger ikke $e^A e^B = e^{A+B}$.

1.5 Øvre triangulære matriser[6]

I denne seksjonen betrakter vi øvre triangulære matriser, men alle resultater i denne seksjonen kan lett overføres til nedre triangulære matriser.

Lemma 1.8. *La $A_1, A_2, ..., A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ være øvre triangulære matriser. Da er $A_1 A_2 ... A_k$ øvre triangulær.*

[6] Kilde: [9].

Bevis. Skal først bevise at et produkt AB av to øvre triangulære $n \times n$ matriser A og B, også er øvre triangulær. La $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ og $AB = [c_{ij}]$. For alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ så er da

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \tag{1.4}$$

For at AB skal være øvre triangulær må alle c_{ij}, der $i > j$, være 0. Men for $i > j$ så er $a_{i1}, \ldots, a_{i(i-1)} = 0$, som er de $i-1$ første elementene i rad i av A. For B er de $n-j$ siste elementene $b_{(j+1)j}, \ldots, b_{nj}$ i kolonne j også lik 0. Dette er tilsammen minst n elementer da $(i-1)+(n-j) = n+i-j-1 \geq n$ fordi $i > j$, og alle produktene i (1.4) er 0. Dette betyr at summen i (1.4) også er 0. Ved induksjon på k finner vi enkelt ut at det må være sant for alle k, og lemmaet er bevist. □

Legg merke til at en konsekvens av lemmaet er at hvis A er en øvre triangulær matrise, så er også A^k øvre triangulær for alle $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 1.9. *La A være en øvre triangulær matrise. Da er e^A øvre triangulær.*

Bevis. Først observer at A^k er øvre triangulær for alle $k \in \mathbb{N}$. Men for hver $n \in \mathbb{N}$ er $\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ en sum av øvre triangulære matriser, og følgelig øvre triangulær selv. En grense av øvre triangulære matriser er opplagt øvre triangulær. Dermed er e^A øvre triangulær, og lemmaet bevist. □

Lemma 1.10. *La $A = \left[a_{ij}^{(1)}\right]$ være en øvre triangulær $n \times n$ matrise. La videre*

$$A^k = \left[a_{ij}^{(k)}\right] \text{ for alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da er diagonalelementene $a_{ii}^{(k)}$ til A^k gitt ved at

$$a_{ii}^{(k)} = a_{ii}^k,$$

for alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Bevis. Vi gir et induksjonsbevis på k. For $k = 1$ er det opplagt sant. Anta nå at lemmaet er sant for $k = q-1$ hvor $q \geq 2$. Skal vise at det da må være sant for $k = q$. Ser at $A^q = AA^{q-1}$, som betyr at

$$a_{ii}^{(q)} = a_{i1}^{(1)}a_{1i}^{(q-1)} + a_{i2}^{(1)}a_{2i}^{(q-1)} + \ldots + a_{in}^{(1)}a_{ni}^{(q-1)}. \tag{1.5}$$

Men for alle rader i A så er $a_{i1}^{(1)} = \ldots = a_{i(i-1)}^{(1)} = 0$, fordi A er øvre triangulær. Det er de $i-1$ første elementene i rad i av A. For A^{q-1} er de $n-i$ siste elementene $a_{(i+1)i}, \ldots, a_{ni}$ i kolonne i også lik 0. Dette er tilsammen $n-1$ elementer da

$$(i-1)+(n-i) = n+i-i-1 = n-1.$$

Da er det kun i produktet $a_{ii}a_{ii}^{(q-1)}$ ingen av faktorene er 0. Dette betyr at summen i (1.5) er $a_{ii}a_{ii}^{(q-1)} = a_{ii}a_{ii}^{q-1} = a_{ii}^{q}$, som beviser lemmaet. $\square$

Teorem 1.11. *La $A = \left[a_{ij}\right]$ være en øvre triangulær $n \times n$ matrise. La videre $e^A = \left[b_{ij}\right]$. Da er diagonalelementene til e^A gitt ved*

$$b_{ii} = e^{a_{ii}},$$

for alle $i \in \{1 \ldots, n\}$.

Bevis. La $A^k = \left[a_{ij}^{(k)}\right]$. Fra Lemma 1.10 vet vi at diagonalelementene $a_{ii}^{(k)} = a_{ii}^{k}$. Fra definisjonen av e^A får vi da at

$$b_{ii} = 1 + a_{ii} + \frac{a_{ii}^2}{2!} + \frac{a_{ii}^3}{3!} + \ldots + \frac{a_{ii}^k}{k!} + \ldots = e^{a_{ii}},$$

som beviser lemmaet. $\square$

Korollar 1.12. *La D være en diagonalmatrise gitt ved*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Da er

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Bevis. Fordi D er både øvre og nedre triangulær har vi ved Lemma 1.9 at også e^D må være både øvre og nedre triangulær. Dvs. at D er også en diagonalmatrise. Da følger korollaret direkte fra Teorem 1.11. $\square$

Teorem 1.13. *Enhver triangulær matrise $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, hvor alle diagonalelementene er lik 0 er nilpotent av grad $n' \leq n$.*

Bevis. Fordi A kun har en egenverdi $\lambda = 0$ får vi fra Cayley-Hamilton Teoremet at $(A-\lambda I)^n = A^n = O$, som beviser teoremet. $\square$

1.6 Diagonaliserbare eksponenter[7]

Lemma 1.14. *Anta at $A, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, der P er invertibel. For alle $k \in \mathbb{N}$ er da*

$$\left(PAP^{-1}\right)^k = PA^kP^{-1}.$$

Bevis. Vi gir et induksjonsbevis på k. For $k = 1$ er det opplagt sant. Anta nå at det er sant for $k = q-1$, hvor $q \geq 2$. Skal vise at det da også må være sant for $k = q$.

$$\left(PAP^{-1}\right)^q = \left(PAP^{-1}\right)\left(PAP^{-1}\right)^{q-1} = PAP^{-1}PA^{q-1}P^{-1} = PAIA^{q-1}P^{-1} = PA^qP^{-1}.$$

Lemmaet er bevist. $\square$

Lemma 1.15. *Anta at A og P er som i Lemma 1.14. Da er*

$$Pe^AP^{-1} = e^{PAP^{-1}}.$$

Bevis. Ved hjelp av Lemma 1.14 er dette lett å vise.

$$\begin{aligned} Pe^AP^{-1} &= PIP^{-1} + PAP^{-1} + \tfrac{PA^2P^{-1}}{2!} + \tfrac{PA^3P^{-1}}{3!} + \dots \\ &= I + PAP^{-1} + \tfrac{(PAP^{-1})^2}{2!} + \tfrac{(PAP^{-1})^3}{3!} + \dots \\ &= e^{PAP^{-1}}. \end{aligned}$$

Lemmaet er bevist. $\square$

Så kommer vi til hovedresultatet i dette avsnittet.

[7] Kilder: [1, 4].

Teorem 1.16. *Anta at A er en diagonaliserbar matrise med $A = PDP^{-1}$ for en invertibel P og en diagonalmatrise D. Da er*

$$e^A = Pe^D P^{-1}.$$

Bevis. Ved å bruke Lemma 1.15 ser vi at

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1},$$

og teoremet er bevist. □

Grunnen til at dette er et viktig resultat er fordi vi vet at e^D for en diagonalmatrise D er enkelt å beregne.

Vi skal til slutt i avsnittet se på et eksempel der eksponenten er diagonaliserbar.

Eksempel 1.5. La

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da er A diagonaliserbar med $A = PDP^{-1}$ der

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ og } P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da vet vi at

$$e^D = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}.$$

Vi får da at

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3e-2e^2) & (-3e+3e^2) & (e-e^2) \\ (3e-3e^2) & (-3e+4e^2) & (e-e^2) \\ (3e-3e^2) & (-3e+3e^2) & (e) \end{bmatrix}.$$

■

1.7 Unitære og ortogonale eksponensialmatriser[8]

Vi minner om følgende definisjoner.

Definisjon 1.4 (UNITÆRE MATRISER)**.** En unitær matrise U er en invertibel matrise som har sin hermitisk-konjugerte som invers. Altså som er slik at $UU^* = U^*U = I$.

Eksempel 1.6. Hvis

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

så er A en unitær matrise. Det kan vi se fordi

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & -i & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

som gir at

$$AA^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & -i & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Definisjon 1.5 (ANTIHERMITISKE MATRISER)**.** En antihermitisk matrise A er en matrise med egenskapen at $A = -A^*$.

Eksempel 1.7.

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 2 & -3+i & 1-3i \\ -2 & 0 & -5-2i & 1+2i \\ 3+i & 5-2i & -i & 8-i \\ -1-3i & -1+2i & -8-i & 7i \end{bmatrix}$$

er antihermitisk. ■

[8]Kilder: [2, 3, 6, 9].

Lemma 1.17. *La* $A_1, A_2, ..., A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Da er*

$$(A_1A_2\dots A_{k-1}A_k)^* = \left(A_k^*A_{k-1}^*\dots A_2^*A_1^*\right).$$

Bevis. Observer først at hvis $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \dots r_n \end{bmatrix}$ er en radvektor og $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ er en kolonne-vektor så er

$$\mathbf{rc} = r_1c_1 + \ldots + r_nc_n = c_1r_1 + \ldots + c_nr_n = \mathbf{c}^T\mathbf{r}^T.$$

La R og C være to $n\times n$ matriser der

$$R = \begin{bmatrix} \text{——} & \mathbf{r}_1 & \text{——} \\ \text{——} & \mathbf{r}_2 & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & \mathbf{r}_{n-1} & \text{——} \\ \text{——} & \mathbf{r}_n & \text{——} \end{bmatrix}, \text{ og } C = \begin{bmatrix} | & | & & | & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_{n-1} & \mathbf{c}_n \\ | & | & & | & | \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{r}_i$ er radvektorer og $\mathbf{c}_j$ er kolonne vektorer for $i, j \in \{1, ..., n\}$. Da er

$$RC = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1\mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_1\mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{r}_1\mathbf{c}_{n-1} & \mathbf{r}_1\mathbf{c}_n \\ \mathbf{r}_2\mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_2\mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{r}_2\mathbf{c}_{n-1} & \mathbf{r}_2\mathbf{c}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{r}_{n-1}\mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_{n-1}\mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{r}_{n-1}\mathbf{c}_{n-1} & \mathbf{r}_{n-1}\mathbf{c}_n \\ \mathbf{r}_n\mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_n\mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{r}_n\mathbf{c}_{n-1} & \mathbf{r}_n\mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T\mathbf{r}_1^T & \mathbf{c}_2^T\mathbf{r}_1^T & \dots & \mathbf{c}_{n-1}^T\mathbf{r}_1^T & \mathbf{c}_n^T\mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{c}_1^T\mathbf{r}_2^T & \mathbf{c}_2^T\mathbf{r}_2^T & \dots & \mathbf{c}_{n-1}^T\mathbf{r}_2^T & \mathbf{c}_n^T\mathbf{r}_2^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{c}_1^T\mathbf{r}_{n-1}^T & \mathbf{c}_2^T\mathbf{r}_{n-1}^T & \dots & \mathbf{c}_{n-1}^T\mathbf{r}_{n-1}^T & \mathbf{c}_n^T\mathbf{r}_{n-1}^T \\ \mathbf{c}_1^T\mathbf{r}_n^T & \mathbf{c}_2^T\mathbf{r}_n^T & \dots & \mathbf{c}_{n-1}^T\mathbf{r}_n^T & \mathbf{c}_n^T\mathbf{r}_n^T \end{bmatrix}.$$

Dette medfører at

$$(RC)^* = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{c}_1^T\mathbf{r}_1^T} & \overline{\mathbf{c}_1^T\mathbf{r}_2^T} & \dots & \overline{\mathbf{c}_1^T\mathbf{r}_{n-1}^T} & \overline{\mathbf{c}_1^T\mathbf{r}_n^T} \\ \overline{\mathbf{c}_2^T\mathbf{r}_1^T} & \overline{\mathbf{c}_2^T\mathbf{r}_2^T} & \dots & \overline{\mathbf{c}_2^T\mathbf{r}_{n-1}^T} & \overline{\mathbf{c}_2^T\mathbf{r}_n^T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\mathbf{c}_{n-1}^T\mathbf{r}_1^T} & \overline{\mathbf{c}_{n-1}^T\mathbf{r}_2^T} & \dots & \overline{\mathbf{c}_{n-1}^T\mathbf{r}_{n-1}^T} & \overline{\mathbf{c}_{n-1}^T\mathbf{r}_n^T} \\ \overline{\mathbf{c}_n^T\mathbf{r}_1^T} & \overline{\mathbf{c}_n^T\mathbf{r}_2^T} & \dots & \overline{\mathbf{c}_n^T\mathbf{r}_{n-1}^T} & \overline{\mathbf{c}_n^T\mathbf{r}_n^T} \end{bmatrix} = C^*R^*.$$

Dette viser at $(RC)^* = C^*R^*$ for to $n\times n$ matriser R og C.
Lemmaet er altså sant for $k = 2$. Ved induksjon på k skal vi nå vise at hvis lemmaet er sant for $k = q-1$, hvor $q \geq 3$, så er det også sant for $k = q$. La $B = (A_2A_3\dots A_q)$ hvor $A_2, A_3, ..., A_q$ er $n\times n$ matriser. Ved vår induksjonsantagelse er da $B^* = A_q^*\dots A_3^*A_2^*$. Det betyr at

$$(A_1A_2\dots A_q)^* = (A_1B)^*.$$

Men da A_1 og B er som R og C ovenfor. Det betyr at

$$(A_1B)^* = B^*A_1^* = A_q^* \dots A_2^*A_1^*,$$

som viser at lemmaet er sant for alle k. □

Lemma 1.18. *La $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ og $q \in \mathbb{N}$. Da er*

$$(A^q)^* = (A^*)^q$$

Bevis. Følger direkte av Lemma 1.17 ved å sette $A = A_1 = A_2 = \dots = A_q$. □

Teorem 1.19. *Når A er antihermitisk er e^A unitær.*

Bevis. Det følger fra Lemma 1.18 at $(e^A)^* = e^{A^*}$. Så hvis A er antihermitisk, så er $(e^A)^* = e^{A^*} = e^{-A}$. Dermed har vi at

$$e^A(e^A)^* = e^Ae^{-A} = I,$$

som beviser teoremet. □

Korollar 1.20. *Når A er reell og antisymmetrisk er e^A reel og ortogonal.*

Bevis. En reell antisymmetrisk matrise er en antihermitisk matrise med kun reelle elementer, og en reell ortogonal matrise er en unitær matrise med kun reelle elementer. Da følger Korollaret direkte fra Teorem 1.19 ved at $B^* = B^T$ når B er reell. □

Lemma 1.21. *La D være en unitær diagonalmatrise gitt ved*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Da finnes det en rent imaginær diagonalmatrise

$$B = \begin{bmatrix} i\theta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i\theta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i\theta_n \end{bmatrix},$$

med passende $\theta_j \in [0, 2\pi)$, slik at

$$D = e^B = \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{bmatrix}.$$

Bevis. Fra Korollar 1.12 vet vi at hvis det finnes en slik B med $e^{i\theta_j} = \lambda_j$ for $j = 1, \dots, n$, vil e^B være lik D. Vi må altså kun vise at det for hver j finnes en θ_j slik at $e^{i\theta_j} = \lambda_j$. Når D er diagonal og unitær må $|\lambda_j| = 1$ for alle $j = 1, \dots, n$, altså hver λ_j ligger på enhetssirkelen. Skriver vi λ_j på polarform, får vi $\lambda_j = e^{i\theta_j}$, der $\theta_j \in [0, 2\pi)$, og vi har funnet θ_j som beviser lemmaet. □

Teorem 1.22. *For enhver unitær matrise U finnes det en antihermitisk A slik at $U = e^A$.*

Bevis. Når U er unitær vet vi fra spektralteoremet for normale matriser at det finnes en unitær V og en diagonal og unitær D slik at

$$U = VDV^*.$$

Fra Lemma 1.21 vet vi at det finnes en rent imaginær diagonal B slik at $D = e^B$. Vi får

$$U = Ve^BV^*.$$

Fra Lemma 1.15 vet vi at dette gir

$$U = e^{VBV^*}.$$

Setter vi nå $A = VBV^*$ og viser at $A^* = -A$ har vi vist teoremet. Fra Lemma 1.17 vet vi at

$$A^* = (VBV^*)^* = (V^*)^* B^*V^* = VB^*V^*.$$

Men siden B er en rent imaginær diagonalmatrise må B^* være lik $-B$. Vi får da at

$$A^* = VB^*V^* = V(-B)V^* = -VBV^* = -A,$$

og teoremet er bevist. □

Nå er det fristende å anta at vi får et tilsvarende resultat i det reelle tilfellet. Altså at hvis U er reell og ortogonal, så finnes det en reell og antisymmetrisk A, slik at $e^A = U$. Det viser seg derimot at dette ikke alltid stemmer. Det stemmer kun i de tilfeller der $\det(U) = 1$. For å vise at determinanten må være 1 trenger vi følgende teorem som binder sammen begrepene trase og determinant. Husk at trasen til A er summen av diagonalelementene i A og betegnes $Tr(A)$.

Teorem 1.23. *La $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Da er*

$$\det\left(e^{A}\right) = e^{Tr(A)}$$

Bevis. For å bevise dette trenger vi noen flere resultater. Beviset er derfor flyttet til avsnitt 2.3 $\square$

Eksempel 1.8. Vi lar A være som i Eksempel 1.5. Da er

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

og

$$e^{A} = \begin{bmatrix} (3e-2e^2) & (-3e+3e^2) & (e-e^2) \\ (3e-3e^2) & (-3e+4e^2) & (e-e^2) \\ (3e-3e^2) & (-3e+3e^2) & (e) \end{bmatrix}.$$

Det gir at $\mathrm{Tr}(A) = 5$ og

$$det(e^{A}) = (3e-2e^2)\begin{vmatrix} (-3e+4e^2) & (e-e^2) \\ (-3e+3e^2) & e \end{vmatrix}$$

$$+(3e-3e^2)\begin{vmatrix} (3e-3e^2) & (e-e^2) \\ (3e-3e^2) & (e) \end{vmatrix} + (e-e^2)\begin{vmatrix} (3e-3e^2) & (-3e+4e^2) \\ (3e-3e^2) & (-3e+3e^2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (3e-2e^2)(-3e^2+4e^4+3e^2-3e^3-3e^3+3e^4) \\
&+(3e-3e^2)(3e^2-3e^3-3e^2+3e^3+3e^3-3e^4) \\
&+(e-e^2)(-9e^2+9e^3+9e^3-9e^4+9e^2-9e^3-12e^3+12e^4) \\
&= (3e-2e^2)(3e^4-2e^3+(3e-3e^2)(-3e^4+3e^3)+(e-e^2)(3e^4-3e^3) \\
&= 9e^5-6e^4-6e^6+4e^5-9e^5+9e^4+9e^6-9e^5+3e^5-3e^4-3e^6+3e^5 \\
&= e^5 = e^{\mathrm{Tr}(A)}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Korollar 1.24. *La U være reell og ortogonal, og $U = e^{A}$ for en antisymmetrisk A. Da er*

$$\det(U) = 1$$

Bevis. Når A er antisymmetrisk blir $Tr(A) = 0$. Fra Teorem 1.23 følger det da at $\det\left(e^A\right) = e^0 = 1$. $\square$

Dette betyr at hvis e^A er reell og ortogonal, men $\det(e^A) \neq 1$, så kan ikke A være reell og antisymmetrisk. En reell og ortogonal matrise med determinant lik 1 kalles for spesielt ortogonal, og er en rotasjonsmatrise. Det viser seg at alle reelle og ortogonale matriser med determinant lik 1 kan skrives som en eksponensialmatrise med en antisymmetrisk eksponent. Men det skal vi ikke vise her.

Vi skal se på en annen konsekvens av dette.

Korollar 1.25. *La U være en unitær matrise og A en antihermitisk matrise slik at $U = e^A$. Da har vi følgende ekvivalens*

$$\det(U) = 1 \Leftrightarrow Tr(A) = 0$$

Bevis. Vi vet at $\det(U) = e^{Tr(A)}$, som betyr at hvis $\det(U) = 1$ så må $\mathrm{Tr}(A) = 0$ og omvendt. $\square$

Vi har sett at alle eksponensialmatriser er invertible. Vi skal ikke bevise det her, men det viser seg faktisk at alle invertible matriser er eksponensialmatriser. Vi kan altså se på $e : \mathbb{C}^{n\times n} \to GL(n,\mathbb{C})$ som en surjektiv avbildning, der $GL(n,\mathbb{C})$ er gruppen av alle invertible matriser.

Kapittel 2

Fra Jordan normalform til eksponensialmatriser

2.1 Jordanblokker[1]

Definisjon 2.1 (JORDANBLOKK)**.** La $\lambda \in \mathbb{C}$. Vi setter $J_1(\lambda) = [\lambda]$, og tenker på den som en 1×1 matrise. For $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, setter vi

$$J_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

En matrise av typen $J_m(\lambda)$ kalles en $m \times m$ Jordanblokk assosiert med λ.

En Jordanblokk har samme verdi på alle diagonalelementene, videre er alle elementene på superdiagonalen lik 1. Legg merke til at $J_m(\lambda) = \lambda I + J_m(0)$, som betyr at

$$e^{J_m(\lambda)} = e^{\lambda I + J_m(0)} = e^{\lambda I} e^{J_m(0)},$$

siden λI og $J_m(0)$ kommuterer.

[1]Dette avsnittet bygger på avsnitt 4.3 i [2].

Lemma 2.1. *La $n, k \in \mathbb{N}$ og være slik at $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$. La videre $A_k = [a_{ij}]$ være $n \times n$ matrisen med følgende egenskaper:*

- $a_{ij} = 1$ *for alle* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *slik at* $j - i = k$.
- $a_{ij} = 0$ *for alle* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *slik at* $j - i \neq k$.

Da er

$$A_k = (J_n(0))^k.$$

Bevis. Skal bevise lemmaet ved induksjon på k. Legg først merke til at definisjonen av A_k betyr at $A_1 = J_n(0)$, så lemmaet er opplagt sant hvis $k = 1$. Anta nå at det er sant for $k = q-1$, der $2 \leq q \leq n-1$, skal vise at det da også må være sant for $k = q$. La $\mathbf{r}_i$ betegne radvektor i av A_1 og $\mathbf{c}_j$ betegne kolonnevektor j av A_{q-1}. Ved induksjonsantagelsen er da $A_1 A_{q-1} = (J_n(0))(J_n(0))^{q-1} = (J_n(0))^q = [b_{ij}]$. Da er $b_{ij} = \mathbf{r}_i \mathbf{c}_j = 1$ når $i = j - q$ og 0 ellers, som betyr at $A_1 A_{q-1} = A_q$. Dette viser ved induksjon på k at $(J_n(0))^k = A_k$, og lemmaet er bevist. □

Teorem 2.2. *Jordan blokken $J_n(0)$ er nilpotent av grad n.*

Bevis. Fra Lemma 1.13 vet vi at $(J_n(0))^n = O$. Men fra Lemma 2.1 vet vi at når $k = n-1$, så er $(J_n(0))^k = A_k$ matrisen hvor alle elementer er 0 utenom elementet øverst i høyre hjørne, som er 1. Dette beviser teoremet. □

Eksempel 2.1. La

$$J_5(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da er

$$(J_5(0))^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (J_5(0))^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(J_5(0))^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (J_5(0))^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

Korollar 2.3. *La $J_n(0)$ være en Jordanblokk. Da er*

$$e^{J_n(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-4)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bevis. Teorem 2.2 gir at

$$e^{J_n(0)} = I_n + J_n(0) + \frac{(J_n(0))^2}{2!} + \dots + \frac{(J_n(0))^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Da følger korollaret lett fra Lemma 2.1. □

Eksempel 2.2. Vi beregner $e^{J_5(0)}$.

$$e^{J_5(0)} = I_5 + J_5(0) + \frac{(J_5(0))^2}{2!} + \frac{(J_5(0))^3}{3!} + \frac{(J_5(0))^4}{4!}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Fordi det er enkelt å beregne både $e^{\lambda I_n}$ og $e^{J_n(0)}$ blir det også enkelt å beregne $e^{J_n(\lambda)} = e^{\lambda I_n} e^{J_n(0)}$.

Eksempel 2.3. Vi beregner $e^{J_5(\lambda)}$. Da vet vi at

$$e^{J_5(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ og } e^{\lambda I_5} = e^{\lambda} I_5 = \begin{bmatrix} e^{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Da får vi at

$$e^{J_5(\lambda)} = e^{\lambda} I_5 e^{J_5(0)} = e^{\lambda} e^{J_5(0)} = e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda} & e^{\lambda} & \frac{e^{\lambda}}{2!} & \frac{e^{\lambda}}{3!} & \frac{e^{\lambda}}{4!} \\ 0 & e^{\lambda} & e^{\lambda} & \frac{e^{\lambda}}{2!} & \frac{e^{\lambda}}{3!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda} & e^{\lambda} & \frac{e^{\lambda}}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda} & e^{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda} \end{bmatrix}.$$

■

2.2 Jordan Matriser[2]

Definisjon 2.2 (JORDAN MATRISE)**.** En Jordan matrise $J = \left[a_{ij}\right]$ er en direkte sum av Jordanblokker.

Eksempel 2.4. Gitt Jordanblokkene

$$J_2(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, J_1(\lambda_2) = \left[\lambda_2\right], og\ J_3(\lambda_3) = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. Da er

$$J = J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_3(\lambda_3) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \left[\lambda_2\right] & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

[2]Kilde: [2].

$$
= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}
$$

en Jordan matrise. ■

En Jordan matrise J tilfredstiller følgende egenskaper:

- J er kvadratisk. Vi lar $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
- Alle ikke-null elementer ligger på diagonalen eller på superdiagonalen. Altså at alle ikke-null elementer er på a_{ii} eller $a_{j(j+1)}$ for alle $i \in \{1, ..., n\}$ og alle $j \in \{1, ..., n-1\}$.
- Alle elementer på superdiagonalen er enten 0 eller 1. Altså er $a_{j(j+1)} \in \{0, 1\}$ for alle $j \in \{1, ..., n-1\}$.
- Hvis et element på superdiagonalen er 1 må elementet under og til venstre være lik hverandre. Altså at hvis $a_{j(j+1)} = 1$ må $a_{jj} = a_{(j+1)(j+1)}$ for alle $j \in \{1, ..., n-1\}$.

Legg merke til at siden Jordan matriser er øvre triangulære vil alle resultater fra avsnitt 1.5 også gjelde for Jordan matriser. Vår interesse for Jordan matriser skyldes blandt annet følgende viktige teorem, som ofte kan brukes i problemer med ikke diagonaliserbare kvadratiske matriser.

Teorem 2.4. *Enhver $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kan skrives på formen PJP^{-1}, der P er en invertibel matrise og J er en Jordan matrise. Vi sier at PJP^{-1} er en Jordan normalform for A.*

Bevis. Sett $T = L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Anta at en Jordan basis $\mathscr{B}$ eksisterer for T, og la $\mathscr{C}$ være standard basisen for $\mathbb{C}^n$. Da er

$$
A = [T]_{\mathscr{C}} = \underset{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{B}}{P} [T]_{\mathscr{B}} \underset{\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{C}}{P},
$$

hvor $\underset{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{B}}{P}$ og $\underset{\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{C}}{P}$ er hverandres invers og $[T]_{\mathscr{B}}$ er en Jordan matrise. Fra avsnitt 4.3 i [2], vet vi at en slik Jordan basis for T alltid eksisterer. □

I mange bøker sies det at J er en kanonisk Jordan form til A. Men vi vil være interessert i dekomposisjonen $A = PJP^{-1}$ og bruker derfor terminologien i Teorem 2.4.

Lemma 2.5. *La $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k$ være slik at hver A_l og B_l er $n_l \times n_l$ matriser for $l \in \{1, \ldots, k\}$ og $k, n_l \in \mathbb{N}$. La videre*

$$\mathscr{A}_k = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$$

og

$$\mathscr{B}_k = B_1 \oplus \ldots \oplus B_k.$$

Da er følgende påstander sanne:

$$(i) : \mathscr{A}_k \mathscr{B}_k = A_1 B_1 \oplus \ldots \oplus A_k B_k.$$

$$(ii) : \mathscr{A}_k + \mathscr{B}_k = (A_1 + B_1) \oplus \ldots \oplus (A_k + B_k).$$

Bevis. Fordi (ii) er opplagt nøyer vi oss med å bevise (i):
(i) er opplagt sant for $k = 1$. Skal først vise at det også er sant for $k = 2$. La

$$\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{n_1+n_2} \text{ være radvektorer i } \mathscr{A}_2$$

$$\mathbf{r}_1^{(l)}, \ldots, \mathbf{r}_{n_l}^{(l)} \text{ være radvektorer i } A_l$$

$$\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{n_1+n_2} \text{ være kolonnevektorer i } \mathscr{B}_2$$

$$\mathbf{c}_1^{(l)}, \ldots, \mathbf{r}_{n_l}^{(l)} \text{ være kolonnevektorer i } B_l$$

og

$$\mathscr{A}_2 \mathscr{B}_2 = [a_{ij}].$$

Da har vi følgende relasjoner:

(a) Når $i, j \in \{1, \ldots, n_1\}$ så er $a_{ij} = \mathbf{r}_i \mathbf{c}_j = \mathbf{r}_i^{(1)} \mathbf{c}_j^{(1)}$.

(b) Når $i, j \in \{n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2\}$ så er $a_{ij} = \mathbf{r}_i \mathbf{c}_j = \mathbf{r}_{i-n_1}^{(2)} \mathbf{c}_{j-n_1}^{(2)}$.

(c) Når $i \in \{1, \ldots, n_1\}$, og $j \in \{n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2\}$ så er $a_{ij} = \mathbf{r}_i \mathbf{c}_j = 0$.

(d) Når $i \in \{n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2\}$, og $j \in \{1, \ldots, n_1\}$ så er $a_{ij} = \mathbf{r}_i \mathbf{c}_j = 0$.

Punktene (a)-(d) over er illustrert i matrisen under.

$$\mathscr{A}_2 \mathscr{B}_2 = \begin{bmatrix} \overset{(a)}{\begin{bmatrix} A_1 B_1 \end{bmatrix}} & \overset{(c)}{0} \\ \overset{(d)}{0} & \overset{(b)}{\begin{bmatrix} A_2 B_2 \end{bmatrix}} \end{bmatrix}.$$

Ved et enkelt induksjonsargument på k kan vi nå vise at lemmaet må stemme for alle k. Anta at lemmaet er sant for $k = q - 1$, skal vise at det da også må være sant for $k = q$. Det er lett å se at $\mathscr{A}_q = \mathscr{A}_{q-1} \oplus A_q$, og at $\mathscr{B}_q = \mathscr{B}_{q-1} \oplus B_q$. Ovenfor har vi da vist at $\mathscr{A}_q\mathscr{B}_q = \mathscr{A}_{q-1}\mathscr{B}_{q-1} \oplus A_qB_q$ som ved vår induksjonsantagelse er lik

$$A_1B_1 \oplus \ldots \oplus A_{q-1}B_{q-1} \oplus A_qB_q.$$

Dette beviser (i), og er illustrert i matrisen under.

$$\mathscr{A}_q\mathscr{B}_q = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_1B_1] & & & \\ & [A_2B_2] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [A_{q-1}B_{q-1}] \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} A_qB_q \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

□

Lemma 2.6. *For $n \in \mathbb{N}$, la $A_1, \ldots, A_n$ være n kvadratiske matriser, og*

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n.$$

Da er

$$A^k = A_1^k \oplus \ldots \oplus A_n^k,$$

for alle $k \in \mathbb{N}$.

Bevis. Skal bevise lemmaet ved induksjon på k. Lemmaet er opplagt sant for $k = 1$. Anta at det er sant for $k = q - 1$, der $q \geq 2$, skal vise at det da også er sant for $k = q$. Ser at $A^q = AA^{q-1}$. Ved vår induksjonsantagelse er A og A^{q-1} som A og B i Lemma 2.5. Det betyr at

$$A^q = AA^{q-1} = A_1A_1^{q-1} \oplus \ldots \oplus A_nA_n^{q-1} = A_1^q \oplus \ldots \oplus A_n^q,$$

og lemmaet er bevist. □

Teorem 2.7. *La*

$$J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus J_{n_l}(\lambda_l), \text{ der } l, n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}.$$

Da er

$$e^J = e^{J_{n_1}(\lambda_1)} \oplus \ldots \oplus e^{J_{n_l}(\lambda_l)}.$$

Bevis. Fra Lemma 2.6 vet vi at for alle $k \in \mathbb{N}$ så er

$$J^k = J_{n_1}(\lambda_1)^k \oplus \ldots \oplus J_{n_l}(\lambda_l)^k.$$

For $N \in \mathbb{N}$ er da

$$e^J = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{J^k}{k!}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{J_{n_1}(\lambda_1)^k \oplus \ldots \oplus J_{n_l}(\lambda_l)^k}{k!}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{J_{n_1}(\lambda_1)^k}{k!} \oplus \ldots \oplus \frac{J_{n_l}(\lambda_l)^k}{k!}\right)\right).$$

Ved gjentatt bruk av Lemma 2.5 får vi da at

$$e^J = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{J_{n_1}(\lambda_1)^k}{k!} \oplus \ldots \oplus \sum_{k=0}^{N} \frac{J_{n_l}(\lambda_l)^k}{k!}\right).$$

Fordi grensen for en følge av matriser beregnes i hver komponent får vi at

$$e^J = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{J_{n_1}(\lambda_1)^k}{k!}\right) \oplus \ldots \oplus \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{J_{n_l}(\lambda_l)^k}{k!}\right) = e^{J_{n_1}(\lambda_1)} \oplus \ldots \oplus e^{J_{n_l}(\lambda_l)},$$

som beviser lemmaet. □

Vi ser nå at vi kan finne e^J når J er en Jordanmatrise, ved å beregne eksponensialmatrisen til hver Jordan blokk til J. Vi har altså funnet en fremgansgmåte for å løse e^J. Vi skal se på hva løsningen blir hvis J er som Jordanmatrisen i Eksempel 2.4.

Eksempel 2.5. Vi skal beregne e^J der

$$J = J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_3(\lambda_3) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \lambda_2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Vi vet at

$$e^{J_2(\lambda_1)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} \\ 0 & e^{\lambda_1} \end{bmatrix},\ e^{J_1(\lambda_2)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_2} \end{bmatrix}\ og\ e^{J_3(\lambda_3)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_3} & e^{\lambda_3} & \frac{e^{\lambda_3}}{2} \\ 0 & e^{\lambda_3} & e^{\lambda_3} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{bmatrix}.$$

Da blir

$$e^J = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} \\ 0 & e^{\lambda_1} \end{bmatrix} & 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} e^{\lambda_2} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} e^{\lambda_3} & e^{\lambda_3} & \frac{e^{\lambda_3}}{2} \\ 0 & e^{\lambda_3} & e^{\lambda_3} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3} & e^{\lambda_3} & \frac{e^{\lambda_3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3} & e^{\lambda_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{bmatrix}.$$

■

Teorem 2.8. *La $J = J_{n_1}(0) \oplus J_{n_2}(0) \oplus \ldots \oplus J_{n_k}(0)$, for $k, n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}$. Anta at $n = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Da er J nilpotent av grad n.*

Bevis. Fra Lemma 2.2 vet vi at $J_m(0)$ er nilpotent av grad m for enhver $m \in \mathbb{N}$. Fra Lemma 2.6 får vi at $J^n = (J_{n_1}(0))^n \oplus (J_{n_2}(0))^n \oplus \cdots \oplus (J_{n_k}(0))^n = O \oplus O \oplus \ldots \oplus O$. Hvis nå $n = n_j$ for $1 \leq j \leq k$ er $J_{n_j}(0)^{n_j - 1} \neq 0$, og dermed er $J^{n_j - 1} \neq O$. Da må J være nilpotent av grad $n = n_j$, og teoremet er bevist. □

Lemma 2.9. *La*

$$J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus J_{n_k}(\lambda_k),$$

og

$$J_0 = J_{n_1}(0) \oplus \ldots \oplus J_{n_k}(0).$$

La til slutt D være diagonalmatrisen gitt ved

$$D = J - J_0 = \lambda_1 I_{n_1} \oplus \ldots \oplus \lambda_k I_{n_k}.$$

Da kommuterer D og J_0, dvs.

$$DJ_0 = J_0 D.$$

Bevis. Legg merke til at D og J_0 er som A og B i Lemma 2.5. Da er

$$DJ_0 = \lambda_1 I_{n_1} J_{n_1}(0) \oplus \ldots \oplus \lambda_k I_{n_k} J_{n_k}(0) = \lambda_1 J_{n_1}(0) I_{n_1} \oplus \ldots \oplus \lambda_k J_{n_k}(0) I_{n_k} = J_0 D,$$

som beviser lemmaet. □

Nå har vi kommet frem til et viktig resultat

Teorem 2.10. *La J, J_0 og D være som i Lemma 2.9. Da er*

$$e^J = e^{J_0+D} = e^{J_0}e^D.$$

Bevis. Fra Lemma 2.9 vet vi at J_0 og D kommuterer. Da følger det direkte fra Teorem 1.7 at

$$e^J = e^{J_0+D} = e^{J_0}e^D,$$

og teoremet er bevist. □

Når J er en Jordan matrise kan vi altså velge om vi vil beregne e^J blokk for blokk, eller som *hel* matrise. I den siste fremgangsmåten ser vi ikke på Jordanblokkene men matrisene e^{J_0} og e^D som begge er enkle å beregne. Vi ser på et eksempel hvor vi igjen lar J være Jordan matrisen fra Eksempel 2.4.

Eksempel 2.6.

$$J = J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_3(\lambda_3) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Dette gir at

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Da er

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{bmatrix}.$$

Videre vet vi at J_0 er nilpotent av grad 3 så vi trenger kun finne J_0^2.

$$J_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ som gir at } e^{J_0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da har vi alt vi trenger for å gjøre den endelige beregningen:

$$e^J = e^{J_0}e^D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3} & e^{\lambda_3} & \frac{e^{\lambda_3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3} & e^{\lambda_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{bmatrix},$$

som er akkurat samme resultat som i Eksempel 2.5. ■

Fra eksemplet ser vi at vi også her egentlig beregner hver "blokk" for seg. Det gjør at denne fremgangsmåten og den i Eksempel 2.5 essensielt er like.

Til slutt i avsnittet tar vi med et eksempel hvor vi kjenner en Jordan normalform til en matrise A

Eksempel 2.7. La

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -20 & 18 & 4 \\ 100 & -75 & -18 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomet p_A til A er gitt ved $p_A = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$. Vi vet at hvis A kan diagonaliseres kan vi finne e^A enkelt. Men dessverre er egenrommet til egenverdien 2 kun endimensjonalt, og det følger at A ikke kan diagonaliseres. Heldigvis kan det sjekkes at en Jordan normalform for A er $A = PJP^{-1}$ der

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } P^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da kan vi bruke metoden vi har funnet over. Vi finner først e^J.

$$e^J = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix}.$$

Da får vi

$$e^A = e^{PJP^{-1}} = Pe^J P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-15e^3 + 36e^2) & (12e^3 - 27e^2) & (3e^3 - 7e^2) \\ (-20e^3 + 20e^2) & (16e^3 - 15e^2) & (4e^3 - 4e^2) \\ (100e^2) & (-75e^2) & (-19e^2) \end{bmatrix}.$$

■

2.3 Bevis av Teorem 1.23

Teorem 1.23. *La $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Da er*

$$\det\left(e^A\right) = e^{Tr(A)}.$$

Bevis. Fra Teorem 2.4 vet vi at enhver matrise A kan skrives på formen PJP^{-1}, der $J = \left[a_{ij}\right]$ er en Jordan matrise og følgelig øvre triangulær. Vi får da ved Lemma 1.15

$$\det\left(e^A\right) = \det\left(e^{PJP^{-1}}\right) = \det\left(Pe^J P^{-1}\right) = \det\left(e^J P^{-1} P\right) = \det\left(e^J\right).$$

Så vet vi at determinanten til en øvre triangulær matrise er produktet av diagonalelementene. Og vi vet at diagonalelementene i e^J er lik $e^{a_{ii}}$ for alle $i \in \{1, ..., n\}$. Vi får

$$\det\left(e^J\right) = e^{a_{11}} e^{a_{22}} ... e^{a_{nn}} = e^{a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}} = e^{Tr(J)} = e^{Tr\left(JP^{-1}P\right)} = e^{Tr\left(PJP^{-1}\right)} = e^{Tr(A)}.$$

□

Kapittel 3

Fra eksponensialmatriser til Jordan normalform

3.1 En ny tilnærming til eksponensialmatriser[1]

.

Vi kommer til å trenge følgende definisjon.

Definisjon 3.1 (MULTIPLIKASJON MED $n \times 1$ BLOKKMATRISER)**.**

- For en $n \in \mathbb{N}$, la $\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ være en $1 \times n$ matrise. La videre $M_1, \dots, M_n$ være n matriser av samme størrelse. Da kan vi betrakte matrisen $M = [M_1 \dots M_n]^T$ som en $n \times 1$ blokk matrise og definerer

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = a_1 M_1 + \dots + a_n M_n.$$

  Legg merke til at resultatet $a_1 M_1 + \dots + a_n M_n$ er en matrise av samme størrelse som matrisene $M_1, \dots, M_n$.

- La nå $B = [b_{ij}]$ være en $q \times n$ matrise og M være som over. Da definerer vi

$$BM = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & \dots & b_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}M_1 + \dots + b_{1n}M_n \\ \vdots \\ b_{q1}M_1 + \dots + b_{qn}M_n \end{bmatrix}.$$

  Legg nå merke til at BM er en $q \times 1$ blokk matrise hvor hver blokk har samme størrelse som matrisene $M_1, \dots, M_n$.

[1] Dette avsnittet er basert på [11]. Andre kilder: [1, 4, 7]

Lemma 3.1. *La $A = [a_{ij}]$ være en $p \times q$ matrise, mens B og M er som i Definisjon 3.1. Da er*

$$A(BM) = (AB)M.$$

Bevis. Først ser vi at

$$A(BM) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}M_1 + \dots + b_{1_n}M_n \\ \vdots \\ b_{q1}M_1 + \dots + b_{qn}M_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\left(b_{11}M_1 + ... + b_{1n}M_n\right) + ... + a_{1q}\left(b_{q1}M_1 + ... + b_{qn}M_n\right) \\ \vdots \\ a_{p1}\left(b_{11}M_1 + ... + b_{1n}M_n\right) + ... + a_{pq}\left(b_{q1}M_1 + ... + b_{qn}M_n\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(a_{11}b_{11} + \dots + a_{1q}b_{q1}\right)M_1 \quad + \dots + \quad \left(a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1q}b_{qn}\right)M_n \\ \vdots \\ \left(a_{p1}b_{11} + \dots + a_{pq}b_{q1}\right)M_1 \quad + \dots + \quad \left(a_{p1}b_{1n} + \dots + a_{pq}b_{qn}\right)M_n \end{bmatrix}.$$

Så ser vi at

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & \dots & b_{qn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(a_{11}b_{11} + \dots + a_{1q}b_{q1}\right) & \dots & \left(a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1q}b_{qn}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(a_{p1}b_{11} + \dots + a_{pq}b_{q1}\right) & \dots & \left(a_{p1}b_{1n} + \dots + a_{pq}b_{qn}\right) \end{bmatrix}.$$

Da blir

$$(AB)M = \begin{bmatrix} \left(a_{11}b_{11} + \dots + a_{1q}b_{q1}\right)M_1 \quad + \dots + \quad \left(a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1q}b_{qn}\right)M_n \\ \vdots \\ \left(a_{p1}b_{11} + \dots + a_{pq}b_{q1}\right)M_1 \quad + \dots + \quad \left(a_{p1}b_{1n} + \dots + a_{pq}b_{qn}\right)M_n \end{bmatrix},$$

som er det samme vi fikk når vi beregnet $A(BM)$. Dette beviser lemmaet. $\square$

Vi kommer også til å trenge følgende definisjon.

Definisjon 3.2 (WRONSKI MATRISE)**.** La I være et intervall på $\mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$. La videre $y_1, ..., y_n : I \to \mathbb{C}$ være n funksjoner som er $n-1$ ganger deriverbare på intervallet I, og $y = \{y_1, ..., y_n\}$. Da er

$$W[y;t] = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},$$

en Wronski Matrise for $t \in I$.

Lemma 3.2. *La y være som i Definisjon 3.2. Hvis funksjonene i y er lineært uavhengige, så er $W[y;t]$ invertibel.*

Bevis. Se avsnitt 6.12 i [1]. □

Definisjon 3.3 (DERIVASJONSOPERATORENE D OG d)**.**
Derivasjonsoperatoren D er definert ved

$$DY(t) = Y'(t)$$

for en deriverbar $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$.
Derivasjonsoperatoren d er definert ved

$$df(t) = f'(t)$$

for en deriverbar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Lemma 3.3. *La $t \in \mathbb{R}$, og $X(t) = e^{At} = [x_{ij}(t)]$ for en $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. For alle $k \in \mathbb{N}_0$ og $i, j \in \{1, ..., n\}$ gjelder da:*

(i)

$$DX(t) = [dx_{ij}(t)]$$

(ii)

$$D^k X(t) = X(t)A^k = A^k X(t) = [d^k x_{ij}(t)]$$

Bevis.

(i) Følger direkte fra Definisjon 1.3.

(ii) Skal bevise ved induksjon på k. Vet at det er sant for $k = 0$, og $k = 1$. Anta at det er sant for $k = q-1$ der $q \geq 2$ skal vise at det da er sant for $k = q$. Ved å bruke induksjonsantagelsen og Teorem 1.3 får vi

$$D^q X(t) = DD^{q-1}X(t) = DX(t)A^{q-1} = AX(t)A^{q-1} = X(t)A^q = A^q X(t),$$

og

$$D^q X(t) = DD^{q-1}X(t) = D[d^{q-1}x_{ij}(t)].$$

Ved Definisjon 1.3 får vi da

$$D[d^{q-1}x_{ij}(t)] = [dd^{q-1}x_{ij}(t)] = [d^q x_{ij}(t)].$$

Dette beviser lemmaet. □

Lemma 3.4. *La $X(t) = e^{At}$ for en $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. La videre $p(r)$ være et polynom med komplekse koeffisienter, og la $t \in \mathbb{R}$. Da er:*

(i)

$$p(D)X(t) = [p(d)x_{ij}(t)]$$

(ii)

$$p(D)X(t) = p(A)X(t)$$

Bevis. For en $m \in \mathbb{N}_0$, la

$$p(r) = a_0 + a_1 r + \ldots + a_m r^m.$$

(i) Ved Lemma 3.3 er

$$\begin{aligned} p(D)X(t) &= (a_0 + a_1 D + \ldots + a_m D^m)X(t) \\ &= a_0 X(t) + a_1 DX(t) + \ldots + a_m D^m X(t) \\ &= a_0[x_{ij}(t)] + a_1[dx_{ij}(t)] + \ldots + a_m[d^m x_{ij}(t)] \\ &= [a_0 x_{ij}(t) + a_1 dx_{ij}(t) + \ldots + a_m d^m x_{ij}(t)] \\ &= \left[(a_0 + a_1 d + \ldots + a_m d^m)x_{ij}(t)\right] \quad = [p(d)x_{ij}(t)], \end{aligned}$$

som beviser (i).

(ii) Ved Lemma 3.3 (ii) er

$$\begin{aligned} p(D)X(t) &= a_0 X(t) + a_1 DX(t) + \ldots + a_m D^m X(t) \\ &= a_0 X(t) + a_1 AX(t) + \ldots + a_m A^m X(t) \\ &= (a_0 + a_1 A + \ldots + a_m A^m)X(t) \quad = p(A)X(t), \end{aligned}$$

som beviser (ii).

$\square$

Videre vet vi fra Cayley-Hamilton teoremet at enhver $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ løser sitt eget karakteristiske polynom p_A. Altså at hvis $p_A(r) = a_0 + a_1 r + \ldots + a_n r^n$, så er

$$p_A(A) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_n A^n = O.$$

Da følger det direkte fra Lemma 3.4 (ii) at

$$p_A(D)X(t) = O \qquad \text{for alle } t \in \mathbb{R},$$

og dermed får vi ved Lemma 3.4 (i) at

$$p_A(d)x_{ij}(t) = 0 \tag{3.1}$$

for alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ og alle $t \in \mathbb{R}$.

I (3.1) ligger nøkkelen til å finne $X(t)$. Vi skal nemlig se at løsningsrommet til (3.1) har en kjent endelig basis.

Teorem 3.5. *For en $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, skriv*

$$p_A(r) = (r - \lambda_1)^{n_1}(r - \lambda_2)^{n_2} \ldots (r - \lambda_s)^{n_s},$$

der $s \in \mathbb{N}$, $1 \le s \le n$. $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ når $i \neq j$. Videre er $n_1, ..., n_s \in \mathbb{N}$ slik at $n_1 + n_2 + ... + n_s = n$. Da er

$$y = \left\{ y_{l,k} = t^k e^{t\lambda_l} \mid l \in \{1, ..., s\} \text{ og } k \in \{0, ..., n_l - 1\} \right\},$$

en basis for løsningsrommet til differensialligningen $p_A(d)f(t) = 0$ på $\mathbb{R}$.

Bevis. Se avsnitt 2.3 i [4]. $\square$

Fra (3.1) får vi at hvis A og y er som i Teorem 3.5 og $X(t) = e^{At} = [x_{ij}(t)]$ for $i, j \in \{1, ..., n\}$ og $t \in \mathbb{R}$, så er alle $x_{ij}(t)$ lineære kombinasjoner av de n elementene i y. Som en konsekvens av dette får vi følgende korollar.

Korollar 3.6. *La A og y være som i Teorem 3.5, og la $X(t) = e^{At}$ for $t \in \mathbb{R}$. Da er*

$$\begin{aligned} X(t) &= y_{1,0}(t)M_{1,0} + ... + y_{1,n_1-1}(t)M_{1,n_1-1} + ... + y_{s,0}(t)M_{s,0} + ... + y_{s,n_s-1}(t)M_{s,n_s-1} \\ &= \begin{bmatrix} y_{1,0}(t) & y_{1,1}(t) & \ldots & y_{s,n_s-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,0} \\ M_{1,1} \\ \vdots \\ M_{s,n_s-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=0}^{n_l-1} t^k e^{t\lambda_l} M_{l,k}$$

for n passende matriser $M_{l,k} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Hvis vi nå deriverer (3.2) gjentatte ganger får vi at

$$X^{(i)}(t) = y_{1,0}^{(i)}(t)M_{1,0} + \dots + y_{1,n_1-1}^{(i)}(t)M_{1,n_1-1} + \dots + y_{s,0}^{(i)}(t)M_{s,0} + \dots + y_{s,n_s-1}^{(i)}(t)M_{s,n_s-1}$$

På den andre siden er

$$X^{(i)}(t) = A^i X(t).$$

Vi får derfor spesielt at

$$X^{(i)}(0) = y_{1,0}^{(i)}(0)M_{1,0} + \dots + y_{1,n_1-1}^{(i)}(0)M_{1,n_1-1} + \dots + y_{s,0}^{(i)}(0)M_{s,0} + \dots + y_{s,n_s-1}^{(i)}(0)M_{s,n_s-1}$$
$$= A^i.$$

Dette betyr at følgende likningssystem holder:

$$W[y;0]\begin{bmatrix} M_{1,0} \\ M_{1,1} \\ \vdots \\ M_{s,n_s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,0}(0) & y_{1,1}(0) & \dots & y_{s,n_s-1}(0) \\ y'_{1,0}(0) & y'_{1,1}(0) & \dots & y'_{s,n_s-1}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,0}^{(n-1)}(0) & y_{1,1}^{(n-1)}(0) & \dots & y_{sn_s-1}^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,0} \\ M_{1,1} \\ \vdots \\ M_{s,n_s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Siden $W[y;0]$ er invertibel, kan vi gange med $W[y;0]^{-1}$ fra venstre og benytte oss av Lemma 3.1. Det gir at matrisene $M_{l,k}$ oppfyller følgende likning:

$$\begin{bmatrix} M_{1,0} \\ M_{1,1} \\ \vdots \\ M_{s,n_s-1} \end{bmatrix} = W[y;0]^{-1} \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Setter vi nå (3.3) inn i (3.2) får vi en formel for $X(t)$:

$$X(t) = \begin{bmatrix} y_{1,0}(t) & y_{1,1}(t) & \dots & y_{s,n_s-1}(t) \end{bmatrix} W[y;0]^{-1} \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= [\phi_0(t) \dots \phi_{n-1}(t)] \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

der

$$[\phi_0(t)...\phi_{n-1}(t)] = [y_{1,0}...y_{s,n_s-1}]W[y;0]^{-1}.$$

Dette gir oss et uttrykk for X(t) som en endelig sum

$$X(t) = \phi_0(t)I_n + \phi_1(t)A + ... + \phi_{n-1}(t)A^{n-1}.$$

Dette er et flott resultat som vi tar med som et teorem.

Teorem 3.7. *Enhver eksonentialmatrise kan skrives som en endelig sum. La*

$$X(t) = e^{At} = [x_{ij}(t)] \text{ for } t \in \mathbb{R} \text{ og en } A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

$X(t)$ kan ved det vi har sett over skrives som en endelig sum gitt ved

$$X(t) = \phi_0(t)I_n + \phi_1(t)A + ... + \phi_{n-1}(t)A^{n-1},$$

der koeffisient funksjonene er gitt ved

$$[\phi_0(t)...\phi_{n-1}(t)] = [y_{1,0}(t)...y_{s,n_s-1}(t)]W[y;0]^{-1}.$$

Her er $y = \{y_{1,0}(t), ..., y_{s,n_s-1}(t)\}$ en basis for løsningsrommet til $p_A(d)x_{ij}(t) = 0$.

Vi kan også legge merke til at koeffisientfunksjonene $\phi_0(t), ..., \phi_{n-1}(t)$ kun er avhengig av p_A. Det vil si at disse er like for alle $X(t)$ der eksponenten har samme karakteristisk polynom.

Eksempel 3.1. La A være som i Eksempel 1.5. Da er

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } A^2 = \begin{bmatrix} -5 & 9 & -3 \\ -9 & 13 & -3 \\ -9 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomet er $p_A(r) = (r-1)(r-2)^2$ og $y = \{e^t, e^{2t}, te^{2t}\}$. Vi får derfor

$$W[y;t] = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} & te^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} & (1+2t)e^{2t} \\ e^t & 4e^{2t} & (4+4t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Det gir at

$$W[y;0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ og } W[y;0]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nå finne koeffisientfunksjonene $\phi_0(t), \phi_1(t)$ og $\phi_2(t)$:

$$\begin{bmatrix}\phi_0(t) & \phi_1(t) & \phi_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^t & e^{2t} & te^{2t}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(4e^t + (-3+2t)e^{2t}) & (-4e^t + (4-3t)e^{2t}) & (e^t + (-1+t)e^{2t})\end{bmatrix}.$$

Putter vi dette inn i (3.4) får vi

$$X(t) = \left(4e^t + (-3+2t)e^{2t}\right) I_3 + \left(-4e^t + (4-3t)e^{2t}\right) A + \left(e^t + (-1+t)e^{2t}\right) A^2$$

$$= \begin{bmatrix} (3e^t - 2e^{2t}) & (-3e^t + 3e^{2t}) & (e^t - e^{2t}) \\ (3e^t - 3e^{2t}) & (-3e^t + 4e^{2t}) & (e^t - e^{2t}) \\ (3e^t - 3e^{2t}) & (-3e^t + 3e^{2t}) & (e^t) \end{bmatrix}.$$

Legg merke til at dette gir

$$X(1) = e^A = \begin{bmatrix} (3e - 2e^2) & (-3e + 3e^2) & (e - e^2) \\ (3e - 3e^2) & (-3e + 4e^2) & (e - e^2) \\ (3e - 3e^2) & (-3e + 3e^2) & (e) \end{bmatrix},$$

som er akkurat samme resultat som i Eksempel 1.5. ■

For å illustrere at koeffisientfunksjonene er de samme for alle eksponenter med samme karakteristisk polynom, tar vi med et enkelt eksempel til.

Eksempel 3.2. La

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Da er } B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Fordi B er en diagonalmatrise vet vi at

$$Y(t) = e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Fra eksempelet over ser vi også at

$$Y(t) = \left(4e^t + (-3+2t)e^{2t}\right) I_3 + \left(-4e^t + (4-3t)e^{2t}\right) B + \left(e^t + (-1+t)e^{2t}\right) B^2,$$

som nettopp er lik

$$\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

■

3.2 Generealiserte egenrom, Jordan kjeder og matrisene $M_{l,k}$ [2]

I dette avsnittet betrakter vi matrise funksjonen $X(t) = e^{At}$ for en matrise $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ og $t \in \mathbb{R}$. Vi lar videre $p_A(r) = (r-\lambda_1)^{n_1}\ldots(r-\lambda_s)^{n_s}$ være det karakteristiske polynomet til A for en $s \in \mathbb{N}$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_s \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ når $i \neq j$ og $n_1,\ldots,n_s \in \mathbb{N}$ slik at $n_1+\ldots+n_s = n$. Matrisene $M_{l,k}$ er definert i henhold til Korollar 3.6.

Vi begynner med å se på noen av egenskapene til matrisene $M_{l,k}$.

Lemma 3.8. *For $l \in \{1,\ldots,s\}$ og $k \in \{0,\ldots,n_l-1\}$ så gjelder:*

(i)
$$M_{l,k} = \frac{1}{k!}(A-\lambda_l I_n)^k M_{l,0}$$

(ii)
$$AM_{l,n_l-1} = \lambda_l M_{l,n_l-1}$$

(iii)
$$(A-\lambda_l I_n)^{n_l} M_{l,0} = O$$

Bevis. Fra Korollar 3.6 vet vi at

$$X(t) = \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=0}^{n_l-1} t^k e^{t\lambda_l} M_{l,k}.$$

Det gir at

$$AX(t) = DX(t) = \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=0}^{n_l-1} d\left(t^k e^{t\lambda_l} M_{l,k}\right),$$

som ved derivasjonsreglene gir at

$$A\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=0}^{n_l-1} t^k e^{t\lambda_l} M_{l,k} = \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=0}^{n_l-1} t^k e^{t\lambda_l} AM_{l,k} = \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=0}^{n_l-1}\left(t^k\lambda_l e^{t\lambda_l} + kt^{k-1}e^{t\lambda_l}\right)M_{l,k}.$$

Omrokkerer vi litt ser vi at

$$\begin{array}{rlccccccc} & \sum_{l=1}^{s}\Big(e^{t\lambda_l}\big[& AM_{l,0} & + & tAM_{l,1} & + & \ldots & + & t^{n_l-1}AM_{l,n_l-1}\big]\Big) \\ = & \sum_{l=1}^{s}\Big(e^{t\lambda_l}\big[& (\lambda_l M_{l,0}+M_{l,1}) & + & t\left(\lambda_l M_{l,1}+2M_{l,2}\right) & + & \ldots & + & t^{n_l-1}\lambda_l M_{l,n_l-1}\big]\Big). \end{array}$$

Fra Teorem 3.5 vet vi at mengden $\{t^k e^{\lambda_l t} \mid l = 1,..,s : k = 0,..,n_s-1\}$ er lineært uav-

[2] Dette avsnittet er basert på [7]. Andre kilder: [1, 4, 11].

hengig. Vi kan defor konkludere med at

$$\begin{array}{rcl} AM_{l,0} & = & \lambda_l M_{l,0} + M_{l,1}, \\ AM_{l,1} & = & \lambda_l M_{l,1} + 2M_{l,2}, \\ AM_{l,2} & = & \lambda_l M_{l,2} + 3M_{l,3}, \\ & \vdots & \\ AM_{l,n_l-2} & = & \lambda_l M_{l,n_l-2} + (n_l-1)M_{l,n_l-1}, \\ AM_{l,n_l-1} & = & \lambda_l M_{l,n_l-1}. \end{array} \tag{3.5}$$

Ved hjelp av relasjonene i (3.5) kan vi nå bevise lemmaet.

(i) Fra (3.5) ser vi at $AM_{l,k-1} = \lambda_l M_{l,k-1} + kM_{l,k}$ når $k \neq 0$. Det betyr at

$$M_{l,k} = \frac{1}{k}(A - \lambda_l I_n) M_{l,k-1}, \textit{ når } k \neq 0.$$

Beviser ved induksjon på k. (i) er opplagt sant for $k = 1$. Anta at det er sant for $k = q-1$ der $q = 2, 3, ..., n_l - 1$. Skal vise at det da også er sant for $k = q$. Ved vår induksjonsantagelse får vi

$$M_{l,q} = \frac{1}{q}(A - \lambda_l I_n) M_{l,q-1} = \frac{1}{q}(A - \lambda_l I_n)\frac{1}{(q-1)!}(A - \lambda_l I_n)^{q-1} M_{l,0}$$

$$= \frac{1}{q!}(A - \lambda_l I_n)^q M_{l,0},$$

som beviser (i).

(ii) Følger direkte fra siste linje av (3.5).

(iii) Fra (i) ser vi at

$$(A - \lambda_l I_n)^{n_l - 1} M_{l,0} = ([n_l - 1]!) M_{l,n_l-1}.$$

Så ganger vi begge sider med $(A - \lambda_l I_n)$.

$$(A - \lambda_l I_n)^{n_l} M_{l,0} = ([n_l - 1]!)(A - \lambda_l I_n) M_{l,n_l-1}$$

$$= ([n_l - 1]!)\left(AM_{l,n_l-1} - \lambda_l M_{l,n_l-1}\right).$$

Fra (ii) får vi da

$$(A - \lambda_l I_n)^{n_l} M_{l,0} = ([n_l - 1]!)\left(\lambda_l M_{l,n_l-1} - \lambda_l M_{l,n_l-1}\right) = O,$$

som beviser (iii).

□

Lemma 3.9. *La $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{C}^n$ og sett*

$$y_i = e^{At} p_i \qquad \text{for } i = 1, \ldots, m.$$

Da stemmer følgende relasjon:

$$p_1, \ldots, p_m \text{ er lineært uavhengige } \Leftrightarrow y_1, \ldots, y_m \text{ er lineært uavhengige.}$$

Bevis. Siden e^{At} er invertibel er dette et velkjent resultat. Se [9] avsnitt 4.3. □

Lemma 3.10. *La $l \in \{1, \ldots, s\}$. Hvis p er en vektor som tilfredstiller*

$$(A - \lambda_l I_n)^r p = 0$$

men

$$(A - \lambda_l I_n)^{r-1} p \neq 0$$

for en $r \in \mathbb{N}$, så er

$$e^{At} p = e^{\lambda_l t} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} t^j (A - \lambda_l I_n)^j p.$$

Vi sier at p er en generalisert egenvektor for A.

Bevis. Vi har da at $(A - \lambda_l I_n)^m p = 0$ for alle $m \in \mathbb{N}$, $m \geq r$. Det gir

$$e^{At} p = e^{\lambda_l I_n t} e^{(A - \lambda_l I_n)t} p = e^{\lambda_l t} e^{(A - \lambda_l I_n)t} p$$

$$=$$

$$e^{\lambda_l t} \left(I_n + t(A - \lambda_l I_n) + \frac{1}{2!} t^2 (A - \lambda_l I_n)^2 + \ldots + \frac{1}{m!} t^m (A - \lambda_l I_n)^m + \ldots \right) p$$

$$=$$

$$e^{\lambda_l t} \left(p + t(A - \lambda_l I_n) p + \frac{1}{2!} t^2 (A - \lambda_l I_n)^2 p + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1}{(r-1)!} t^{r-1} (A - \lambda_l I_n)^{r-1} p + \ldots + \frac{1}{m!} t^m (A - \lambda_l I_n)^m p + \ldots \right)$$

$$=$$

$$=$$

$$e^{\lambda_l t}\Big(p+t(A-\lambda_l I_n)p+\frac{1}{2!}t^2(A-\lambda_l I_n)^2p+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{(r-1)!}t^{r-1}(A-\lambda_l I_n)^{r-1}p+0+0+\dots\Big)$$

$$=$$

$$e^{\lambda_l t}\Big(I_n+t(A-\lambda_l I_n)+\frac{1}{2!}t^2(A-\lambda_l I_n)^2+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{(r-1)!}t^{r-1}(A-\lambda_l I_n)^{r-1}\Big)p$$

$$=$$

$$e^{\lambda_l t}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}t^j(A-\lambda_l I_n)^jp.$$

Dette beviser lemmaet. □

I resten av kapittelet lar vi K_l betegne det generaliserte egenrommet til A tilhørende egenverdien λ_l. Dvs. $K_l=\{v\in\mathbb{C}^n \mid (A-\lambda_l I_n)^{n_l}v=0\}$, for $l\in\{1,\dots,s\}$.

Lemma 3.11. *For hver $l=1,\dots,s$, la S_l være rommet som er utspent av kolonnevektorene i $M_{l,0}$. Da er*

$$S_l=K_l$$

Bevis. At $S_l\subset K_l$ følger av Lemma 3.8 (iii). Det gjenstår derfor å bevise at $K_l\subset S_l$. La $p\in K_l$, $p\neq 0$. Da finnes $r\in\mathbb{N}$, $r\le n_l$ slik at $(A-\lambda_l I_n)^r p=0$, men $(A-\lambda_l I_n)^{r-1}p\neq 0$. Fra Korollar 3.6 vet vi at

$$e^{At}p=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=0}^{n_i-1}t^ke^{t\lambda_i}M_{i,k}p=e^{\lambda_l t}M_{l,0}p+\sum_{i=1,i\neq l}^{s}\sum_{k=0}^{n_i-1}t^ke^{\lambda_l t}M_{i,k}p+\sum_{k=1}^{n_l-1}t^ke^{\lambda_l t}M_{l,k}p.$$

Fra Lemma 3.10 har vi at

$$e^{At}p=e^{\lambda_l t}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{k!}t^k(A-\lambda_l I_n)^kp=e^{\lambda_l t}p+e^{\lambda_l t}\sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}t^k(A-\lambda_l I_n)^kp.$$

Vi får derfor følgende relasjon

$$e^{\lambda_l t}p+e^{\lambda_l t}\sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}t^k(A-\lambda_l I_n)^kp=e^{\lambda_l t}M_{l,0}p+\sum_{i=1,i\neq l}^{s}\sum_{k=0}^{n_i-1}t^ke^{\lambda_l t}M_{i,k}p+\sum_{k=1}^{n_l-1}t^ke^{\lambda_l t}M_{l,k}p.$$

Da mengden $\left\{t^k e^{\lambda_i t} \mid i \in \{1,...,s\} \text{ og } k \in \{0,...,n_i - 1\}\right\}$ er lineært uavhengig følger det at

$$p = M_{l,0}p.$$

Da er p en lineær kombinasjon av kolonnevektorene i $M_{l,0}$, så $K_l \subset S_l$, som beviser lemmaet. □

Definisjon 3.4 (JORDAN KJEDE)**.** For $l \in \{1,...,s\}$ la $p \in K_l \setminus \{0\}$. Hvis

$$(A - \lambda_l I_n)^r p = 0, \text{ men } (A - \lambda_l I_n)^{r-1} p \neq 0 \text{ for } 1 \leq r \leq n_l,$$

da kalles mengden

$$S_p^{(r)} = \{p_1, ..., p_{r-1}, p_r\},$$

hvor

$$p_j = (A - \lambda_l I_n)^{r-j} p, \quad j = 1, ..., r,$$

for en Jordan kjede for A tilhørende den generaliserte egenverdien λ_l. Videre kalles $p = p_r$ for generatoren, $p_1 = (A - \lambda_l I_n)^{r-1} p$ for initial vektoren og r for lengden til Jordan kjeden. En Jordan kjede er ordnet hvis den er oppramset i rekkefølgen $p_1, ..., p_{r-1}, p_r$.

Legg videre merke til at det ved Definisjon 3.4 og Lemma 3.8 er slik at kolonnene i $M_{l,0}$ er generatorer for Jordan kjeder for A. Videre ser vi at hvis p er den i-te kolonnen i $M_{l,0}$, $(A - \lambda_l I_n)^{r-1} p \neq 0$, men $(A - \lambda_l I_n)^r p = 0$ for en $r \in \{1, ..., n_l - 1\}$, så er den i-te kolonnen i $M_{l,j}$ lik $j! p_{r-j}$ for en $j \in \{1, ..., r-1\}$.

Lemma 3.12 til og med Lemma 3.16 er kjente resultater. Se f.eks. [5] kapittel 7.6. Jeg tar allikevel lemmaene og bevisene med her fordi bevisene baserer seg på resultater som allerede er utviklet i oppgavene.

Lemma 3.12. *Ved å velge p og r som i Definisjon 3.4 blir Jordan kjeden gitt ved*

$$S_p^{(r)} = \{p_1, ..., p_{r-1}, p_r\},$$

lineært uavhengig.

Bevis. Ved 3.9 så holder det å vise at mengden

$$\{y_i \equiv e^{At} p_i \mid i = 1, ..., r\}$$

er lineært uavhengig. Anta at

$$\sum_{i=1}^{r} c_i y_i = 0.$$

Skal vise at da må alle c_i være null. Ved å bruke Lemma 3.10 ser vi først at

$$c_i y_i = c_i e^{At} p_i = c_i e^{\lambda_l t} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{j!} t^j (A - \lambda_l I_n)^j p_i$$

$$= c_i e^{\lambda_l t} \left[p_i + t p_{i-1} + \frac{t^2}{2!} p_{i-2} + \ldots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} p_1 \right].$$

Vi får derfor at

$$0 = \sum_{i=1}^{r} c_i e^{\lambda_l t} \left[p_i + t p_{i-1} + \frac{t^2}{2!} p_{i-2} + \ldots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} p_1 \right]$$

$$\begin{aligned}
= \quad & e^{\lambda_l t} \left[c_r p_r + t c_r p_{r-1} + \tfrac{t^2}{2!} c_r p_{r-2} + \ldots + \tfrac{t^{r-1}}{(r-1)!} c_r p_1 \right] && (a) \\
+ \quad & e^{\lambda_l t} \left[c_{r-1} p_{r-1} + t c_{r-1} p_{r-2} + \tfrac{t^2}{2!} c_{r-1} p_{r-3} + \ldots + \tfrac{t^{r-2}}{(r-2)!} c_{r-1} p_1 \right] && (b) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & e^{\lambda_l t} \left[c_1 p_1 \right].
\end{aligned}$$

Mengden $\{t^k e^{\lambda_i t} \mid i = 1, \ldots, s; k = 0, \ldots, n_i - 1\}$ er lineært uavhengig. Fordi linje (a) er eneste linje hvor $t^{r-1} e^{\lambda_l t}$ forekommer og $p_1 \neq 0$ følger det at $c_r = 0$. Fordi $c_r = 0$ følger det fra linje (b) at $c_{r-1} = 0$ også. Da kan vi følge den samme logikken nedover for å finne at $c_r = c_{r-1} = \ldots = c_1 = 0$, som beviser lemmaet. □

Lemma 3.13. *La p og r være som i Definisjon 3.4. La også $q \in K_l \setminus \{0\}$, og anta at*

$$(A - \lambda_l I_n)^m q = 0, \text{ men } (A - \lambda_l I_n)^{m-1} q \neq 0 \text{ for } 1 \leq m \leq r.$$

La videre $q_i = (A - \lambda_l I_n)^{m-i} q$ for $i \in \{1, \ldots, m\}$. Da gjelder følgende:

$$(A - \lambda_l I_n)^{r-1} p \text{ og } (A - \lambda_l I_n)^{m-1} q \text{ er lineært uavhengige}$$

$$\Rightarrow$$

$$S_p^{(r)} \cup S_q^{(m)} \text{er en lineært uavhengig mengde.}$$

Bevis. Ved 3.9 så holder det igjen å vise at mengden

$$\{y_i \equiv e^{At} p_i \mid i = 1, \ldots, r\} \cup \{z_i \equiv e^{At} q_i \mid i = 1, \ldots, m\}$$

er lineært uavhengig. Anta derfor at

$$\sum_{i=1}^{r} c_i y_i + \sum_{i=1}^{m} d_i z_i = 0.$$

Skal vise at da må alle konstantene c_i og d_i være null. Vi får

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \sum_{i=1}^{r} c_i e^{\lambda_l t}\left[p_i + t p_{i-1} + \frac{t^2}{2!}p_{i-2} + \ldots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}p_1\right] \\ & + & \sum_{i=1}^{m} d_i e^{\lambda_l t}\left[q_i + t q_{i-1} + \frac{t^2}{2!}q_{i-2} + \ldots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}q_1\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{rc} = & e^{\lambda_l t}\left[c_r p_r + t c_r p_{r-1} + \frac{t^2}{2!}c_r p_{r-2} + \ldots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}c_r p_1\right] \\ \vdots & \\ + & e^{\lambda_l t}\left[c_m p_m + t c_m p_{m-1} + \frac{t^2}{2!}c_m p_{m-2} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}c_m p_1\right] \\ \vdots & \\ + & e^{\lambda_l t}\left[c_1 p_1\right] \\ + & e^{\lambda_l t}\left[d_m q_m + t d_m q_{m-1} + \frac{t^2}{2!}d_m q_{m-2} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}d_m q_1\right] \\ \vdots & \\ + & e^{\lambda_l t}\left[d_1 q_1\right] \end{array}$$

Omrokerer vi litt får vi

$$\begin{array}{rcc} = & e^{\lambda_l t}\left[c_r p_r + t c_r p_{r-1} + \frac{t^2}{2!}c_r p_{r-2} + \ldots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}c_r p_1\right] & (a) \\ \vdots & & \\ + & e^{\lambda_l t}\left[c_m p_m + t c_m p_{m-1} + \frac{t^2}{2!}c_m p_{m-2} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}c_m p_1\right] & \\ + & e^{\lambda_l t}\left[d_m q_m + t d_m q_{m-1} + \frac{t^2}{2!}d_m q_{m-2} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}d_m q_1\right] & (b) \\ \vdots & & \\ + & e^{\lambda_l t}\left[c_1 p_1\right] & \\ + & e^{\lambda_l t}\left[d_1 q_1\right] & \end{array}$$

På samme måte som i Lemma 3.12 får vi fra linje (a) at $c_r, \ldots, c_{m+1} = 0$. Fra (b) får vi at $c_m p_1 + d_m q_1 = 0$, men siden lineær uavhengighet mellom p_1 og q_1 er en av betingelsene i lemmaet følger det at $c_m = d_m = 0$. Da kan vi følge den samme logikken nedover for å finne at $(c_{m-1}, d_{m-1}) = \ldots = (c_1, d_1) = (0,0)$, som beviser lemmaet. □

Lemma 3.14. *Lemma 3.13 holder for et vilkårlig antall vektorer med i $K_l \setminus \{0\}$.*

Bevis. Bevises på helt tilsvarende måte som Lemma 3.13. Det blir derimot mye tekst og lite informativt å skrive ned. □

Lemma 3.15. *Anta at* $p, q \in \{K_i \cup K_j\} \setminus \{0\}$ *for* $i, j \in \{1, ..., s\}$, *og* $i \neq j$. *Anta videre at* $(A - \lambda_i I_n)^r p = 0$, *men* $(A - \lambda_i I_n)^{r-1} \neq 0$ *for* $1 \leq r \leq n_i$, *og at* $(A - \lambda_j I_n)^m q = 0$, *men* $(A - \lambda_j I_n)^{m-1} \neq 0$ *for* $1 \leq m \leq \min\{r, n_j\}$. *Da er*

$$S_p^{(r)} \cup S_q^{(m)}$$

lineært uavhengig. Her er $S_p^{(r)} = \{p_1, ..., p_{r-1}, p_r\}$ *når* $p_k = (A - \lambda_i I_n)^{r-k} p$ *for* $k = 1, ..., r$, *og* $S_q^{(m)} = \{q_1, ..., q_{m-1}, q_m\}$ *når* $q_k = (A - \lambda_j I_n)^{m-k} p$ *for* $k = 1, ..., m$

Bevis. Ved 3.9 så holder det igjen å vise at mengden

$$\{y_k \equiv e^{At} p_k \mid k = 1, ..., r\} \cup \{z_k \equiv e^{At} q_k \mid k = 1, ..., m\}$$

er lineært uavhengig. Anta derfor at

$$\sum_{k=1}^{r} c_k y_k + \sum_{k=1}^{m} d_k z_k = 0.$$

Skal vise at da må alle konstantene c_k og d_k være null. Vi får

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \sum_{k=1}^{r} c_k e^{\lambda_i t} \left[p_k + t p_{k-1} + \frac{t^2}{2!} p_{k-2} + ... + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} p_1 \right] \\ & + & \sum_{k=1}^{m} d_k e^{\lambda_j t} \left[q_k + t q_{k-1} + \frac{t^2}{2!} q_{k-2} + ... + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} q_1 \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{rc} = & e^{\lambda_i t} \left[c_r p_r + t c_r p_{r-1} + \frac{t^2}{2!} c_r p_{r-2} + ... + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} c_r p_1 \right] \\ \vdots & \\ + & e^{\lambda_i t} [c_1 p_1] \\ + & e^{\lambda_j t} \left[d_m q_m + t d_m q_{m-1} + \frac{t^2}{2!} d_m q_{m-2} + ... + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} d_m q_1 \right] \\ \vdots & \\ + & e^{\lambda_j t} [d_1 q_1] \end{array}$$

Fordi mengden $\{t^k e^{\lambda_i t} \mid i = 1, ..., s; k = 0, ..., n_i - 1\}$ er lineært uavhengig, får vi på samme måte som i Lemma 3.12 at $c_r = ... = c_1 = 0$ og $d_m, ..., d_1 = 0$ som beviser lemmaet. $\square$

Med noen betingelser så holder Lemma 3.15 for et vilkårlig antall vektorer.

Lemma 3.16. *La $k \in \mathbb{N}$,*

$$p^{(1)}, ..., p^{(k)} \in \{K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_s\} \setminus \{0\},$$

og for $m \in \{1, ..., k\}$ la r_m være lengden av Jordan kjeden generert av $p^{(m)}$. La det videre være slik at hvis $p^{(i)}, p^{(j)} \in K_l$ for $i, j \in \{1, ..., k\}$ og $l \in \{1, ..., s\}$, så er

$$(A - \lambda_l I_n)^{r_i - 1} p^{(i)} \text{ og } (A - \lambda_l I_n)^{r_j - 1} p^{(j)}$$

lineært uavhengig.
Da er også mengden

$$S_{p^{(1)}}^{(r_1)} \cup S_{p^{(2)}}^{(r_2)} \cup ... \cup S_{p^{(k)}}^{(r_k)}$$

lineært uavhengig.

Bevis. Kan bevises på tilsvarende måte som Lemma 3.13 og Lemma 3.15. □

3.3 Hvordan finne en Jordan normalform for en matrise[3]

I dette avsnittet betrakter vi matrise funksjonen $X(t) = e^{At}$ for en matrise $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ og $t \in \mathbb{R}$. Vi lar videre $p_A(r) = (r - \lambda_1)^{n_1} ... (r - \lambda_s)^{n_s}$ være det karakteristiske polynomet til A for en $s \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ når $i \neq j$ og $n_1, ..., n_s \in \mathbb{N}$ slik at $n_1 + ... + n_s = n$. Matrisene $M_{l,k}$ er definert i henhold til Korollar 3.6.

For å finne en Jordan normalform for matrisen A trenger vi først å finne matrisene $M_{l,k}$ fra Korollar 3.6. Disse finner vi ved å regne ut e^{At} ved metoden fra Avsnitt 3.1.

Eksempel 3.3. I Eksempel 3.1 så vi at

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} (3e^t - 2e^{2t}) & (-3e^t + 3e^{2t}) & (e^t - e^{2t}) \\ (3e^t - 3e^{2t}) & (-3e^t + 4e^{2t}) & (e^t - e^{2t}) \\ (3e^t - 3e^{2t}) & (-3e^t + 3e^{2t}) & (e^t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} te^{2t},$$

når

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

[3]Dette avsnittet er basert på [7].

Det betyr at vi kan velge

$$M_{1,0} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, M_{2,0} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ } og \text{ } M_{2,1} = O.$$

■

Definisjon 3.5 (DE UTVIDEDE MATRISENE)**.** For $l \in \{1,...,s\}$ er den utvidede matrisen F_l til e^{At} for egenverdien λ_l definert ved blokk matrisen

$$F_l = \left[\begin{array}{c} 0!M_{l,0} \\ \hline 1!M_{l,1} \\ \hline 2!M_{l,2} \\ \hline \vdots \\ \hline (n_l-1)!M_{l,n_l-1} \end{array}\right].$$

Legg merke til at dette betyr at e^{At} har like mange utvidede matriser som antall distinkte egenverdier. Delene av F_l som tilsvarer matrisene $M_{l,0},...,(n_l-1)!M_{l,n_l-1}$ kaller vi for kvadranter til F_l.

Vi kommer ofte til å forkorte F_l, ved å fjerne de nederste nullmatrisene. Altså hvis det for en $r \in \{1,...,n_l\}$ er slik at alle matrisene $M_{l,i} = O$, når $i \geq r$, så skriver vi som oftest ikke opp matrisene $r!M_{l,r}...(n_l-1)!M_{l,n_l-1}$ i F_l. Videre kommer vi til å kalle kolonnene i de utvidede matrisene for "utvidede kolonner". Dette gjør vi for å tydelig skille de fra kolonnene i matrisene $k!M_{l,k}$, for $k \in \{0,...,n_l-1\}$. Kolonnene i matrisene $k!M_{l,k}$ kommer vi til å referere til som vektorer i de utvidede matrisene. Legg merke til at alle de utvidede kolonnene enten er 0, eller så representerer de ordnede Jordan kjeder for A når de blir delt opp som vektorer. Vi sier at lengden til den i-te utvidede kolonnen er lik lengden av Jordan kjeden med den i-te kolonnen i $M_{l,0}$ som generator. Hvis den i-te kolonnen i $M_{l,0}$ er 0 sier vi at lengden til den utvidede kolonnen er 0.

Eksempel 3.4. Vi lar B være som i Eksempel 3.3. Vi får da de to utvidede matrisene

$$F_1 = [0!M_{1,0}] = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

og

$$F_2 = \left[\begin{array}{c} 0!M_{2,0} \\ \hline 1!M_{2,1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\blacksquare$

Definisjon 3.6 (JORDAN BASIS MATRISE)**.** En $n \times n$ matrise C kalles for en Jordan basis matrise for A dersom kolonnene i C er en Jordan basis for A. Med andre ord at $J = C^{-1}AC$ er en Jordan matrise.

Vi skal nå se på en algoritme for å finne en Jordan basis matrise for A, med etterfølgende eksempler. I neste avsnitt skal vi bevise at algoritmen alltid vil føre frem.

Algoritmen går i loop. Dvs. at når vi har gått igjennom alle stegene begynner vi på nytt med **Steg 1** helt til en gitt betingelse er oppfylt. I algoritmen jobber vi med den utvidede matrisen F_i for en $i \in \{1,...,s\}$. I noen av stegene vil F_i bli endret på. For å markere at matrisen vi jobber med kan være forskjellig fra F_i vil vi i algoritmen kalle den for F_i'. F_i' er altså en variabel som kan endre verdi fra steg til steg. I **Steg 8** skal man markere noen av de utvidede kolonnene i F_i'. Når det ikke er noen "markerte utvidede kolonner" kan man i **Steg 3** ignorere det som står om dem.

Algoritme 1 (ALGORITME FOR Å FINNE EN JORDAN BASIS MATRISE C FOR MATRISEN A UTIFRA DE UTVIDEDE MATRISENE TIL e^{At})**.**

Steg 0: *Vi setter $i = 1$ og $F_1' = F_1$. Lag en $n \times n$ nullmatrise C' som vi i algoritmen skal fylle med kolonner slik at den utvikler seg til en Jordan basis matrise C for A. Lag en tom variabel J' som i løpet av algoritmen skal bli til en Jordan matrise J slik at $AC = CJ$.*

Steg 1: *Kall den eller de utvidede kolonnene i F_i' som er lengst for "valgte utvidede kolonner". Kall lengden for r. Initialvektorene til Jordan kjedene i de valgte utvidede kolonnene kaller vi for "valgte initialvektorer".*

Steg 2: *Er det flere av de utvidede kolonnene i F_i' som er like lange ser vi om de valgte initialvektorene er lineært avhengige.*

Steg 3: *Er de valgte initialvektorene i F_i' lineært avhengige bruker vi kolonneoperasjoner på F_i' for å nulle ut lineært avhengige valgte initialvektorer. Dette gjøres frem til alle de valgte initialvektorene vi har igjen er lineært uavhengige. I denne operasjonen gjelder følgende tre regler:*

- *Det er kun lov til å gjøre kolonneoperasjoner mellom de valgte utvidede kolonnene.*
- *Med en gang en initialvektor blir nullet ut fjernes den tilhørende utvidede kolonnen fra de valgte utvidede kolonnene, og kan derfor ikke lenger brukes i kolonneoperasjonene.*

- *Det er ikke lov til å endre på de markerte utvidede kolonnene.*

Steg 4: *Vi tar Jordan kjedene som er representert av de valgte utvidede kolonnene og legger som kolonner i Jordan basis matrisen C'. Det gjøres ved å følge punktene under for hver valgte kolonne.*

- *Kall Jordan kjedens generator for p.*
- *Erstatt den null-kolonnen i C som er lengst til venstre med Jordan kjedens initialvektor p_1.*
- *Fortsett videre på samme måte med $p_2, \ldots, p_r$, i stigende rekkefølge på indeksen.*

Steg 5: *For hver av de valgte utvidede kolonnene sett $J' = J' \oplus J_r(\lambda_i)$.*

Steg 6: *Hvis det totale antall kolonner som er lagt til C' i arbeidet med F_i' er mindre enn n_i gå videre til **Steg 7**. Hvis antallet derimot er lik n_i hopp til **Steg 10***

Steg 7: *Marker alle de valgte utvidede kolonnene, og kall de for "markerte utvidede kolonner".*

Steg 8: *Kall differansen mellom lengden til de markerte utvidede kolonnene, og lengden til de lengste utvidede kolonnene som ikke er markert for d.*

Steg 9: *Fjern de d øverste vektorene i alle de markerte kolonnene, og flytt resten av vektorene i disse utvidede kolonnene tilsvarende opp slik at de markerte utvidede kolonnene er like lange som de lengste ikke markerte utvidede kolonnene. Hopp så tilbake til **Steg 1**.*

Steg 10: *Hvis $i < s$ øk i med 1, sett $F_i' = F_i$ og gå til **Steg 1**. Hvis $i = s$ så la $C = C'$ og $J = J'$. Da er C en Jordan basis matrise for A slik at $AC = CJ$. Algoritmen er ferdig.*

Vi kommer til å markere kolonneoperasjoner som følger reglene i Algoritme 1 med symbolet $\sim^*$.

Eksempel 3.5. Vi begynner med et enkelt eksempel, ved å fortsette på Eksempel 3.4. Da er $p_B = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$,

$$F_1 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } F_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

med $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$. For $F_1' = F_1$ får vi følgende

Steg 1: Alle de utvidede kolonnene blir valgte utvidede kolonner fordi alle er like lange med lengde $r = 1$.

Steg 2: De valgte initialvektorene er lineært avhengige.

Steg 3: Ved kolonneoperasjoner får vi

$$F_1 \sim^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F_1'.$$

Steg 4: Fra utvidet kolonne 1 i F_1' får vi Jordan kjeden $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ som vi legger inn i C', og får foreløbig at

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Steg 5: Det er en valgt utvidet kolonne, så vi får at

$$J' = J' \oplus J_1(1) = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Steg 6: Fordi $n_1 = 1$ så kan vi hoppe til **Steg 10**.

Steg 10: Vi setter $i = 2$, og gjentar algoritmen for F_2.

For $F_2' = F_2$ får vi følgende

Steg 1: Alle de utvidede kolonnene blir valgte utvidede kolonner fordi alle er like lange med lengde $r = 1$.

Steg 2: De valgte initialvektorene er lineært avhengige fordi

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Steg 3: Ved kolonneoperasjoner får vi

$$F_2 \sim^* \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F_2'.$$

Steg 4: Fra de utvidede kolonnene 1 og 3 i F_2' får vi Jordan kjeden $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ og $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ som vi legger inn i C', og får at

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Steg 5: Det er to valgte utvidede kolonner. Vi får

$$J' = J' \oplus J_1(2) \oplus J_1(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Steg 6: Fordi $n_2 = 2$ så kan vi hoppe til **Steg 10**.

Steg 10: Siden $i = 2 = s$ er algoritmen ferdig. Matrisen $C = C'$ skal da være en Jordan basis matrise for B, og $J = J'$ er slik at $C^{-1}BC = J$.

Vi skal senere bevise at matrisen C nødvendigvis er invertibel. Her kan det lett sjekkes ved å se at $det(C) = -1 \neq 0$, så vi kan se at J faktisk er similær med B ved at $BC = CJ$.

$$BC = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

mens

$$CJ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

Eksempel 3.6. La

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da er det karakteristiske polynomet $p_D(\lambda) = (\lambda - 2)^3$ og

$$e^{Dt} = e^{2t}M_{1,0} + te^{2t}M_{1,1} + t^2e^{2t}M_{1,2},$$

der

$$M_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{og } M_{1,2} = O.$$

Vi får derfor at

$$F_1 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

med $\lambda_1 = 2$. For $F_1' = F_1$ får vi følgende

Steg 1: Utvidet kolonnen 2 blir valgt utvidet kolonne fordi det er den lengste med lengde $r = 2$.

Steg 2: Det er kun en valgt initialvektor, og er derfor lineært avhengig.

Steg 3: Vi trenger ingen kolonneoperasjoner.

Steg 4: Fra den utvidede kolonnen 2 får vi Jordan kjeden $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ som vi legger inn i C', og får at

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Steg 5: Det er en valgt utvidet kolonne. Da får vi at

$$J' = J' \oplus J_2(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Steg 6: Vi har lagt til to kolonner i C'. Egenverdien $\lambda_1 = 2$ har multiplisitet $n_1 = 3$ så vi er ikke ferdige med F_1' og går videre til **Steg 7**.

Steg 7: Vi markerer utvidet kolonne 2, fordi vi har hentet en Jordan kjede fra den. Jeg velger å markere de utvidede kolonnene vi har hentet Jordan kjeder fra med grått. Vi får

$$F_1 \sim^* \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = F_1'.$$

Steg 8: Den markerte utvidede kolonnen har lengde 2. De utvidede kolonnene 1 og 3 er nest lengst med lengde 1. Vi får derfor at differansen $d = 1$.

Steg 9: Vi fjerner den øverste vektoren i den markerte utvidede kolonnen og flytter resten ett hakk opp. Vi får

$$F_1 \sim^* \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = F_1'.$$

Så hopper vi tilbake til **Steg 1**.

Steg 1: Alle de utvidede kolonnene blir valgte utvidede kolonner fordi alle er like lange med lengde $r = 1$.

Steg 2: De valgte initialvektorene er lineært avhengige.

Steg 3: Vi legger utvidet kolonne 1 til utvidet kolonne 3. Så trekker vi utvidet kolonne 2 fra utvidet kolonne 3. Da får vi

$$F_1 \sim^* \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = F_1'.$$

Steg 4: Fra utvidet kolonne 1 får vi Jordan kjeden $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ som vi legger inn i C', og får at

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Steg 5: Det er en valgt utvidet kolonne. Vi får

$$J' = J' \oplus J_1(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Steg 6: Vi har lagt tre kolonner inn i C'. Egenverdien $\lambda_1 = 2$ har multiplisitet $n_1 = 3$, så vi er ferdige med F_1' og hopper til **Steg 10**.

Steg 10: Siden $i = 1 = s$ er algoritmen ferdig. Matrisen $C = C'$ skal da være en Jordan basis matrise for D, og $J = J'$ er slik at $C^{-1}DC = J$.

Matrisen C er invertibel siden $det(C) = -1 \neq 0$, så vi kan se at J faktisk er similær med D ved at $DC = CJ$.

$$DC = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

mens

$$CJ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

Vi tar også med et par eksempler fra [7].

Eksempel 3.7. La

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da er det karakteristiske polynomet $p_E(\lambda) = (\lambda-1)^4(\lambda+1)$ og

$$e^{Et} = e^t M_{1,0} + te^t M_{1,1} + t^2 e^t M_{1,2} + t^3 e^t M_{1,3} + e^{-t} M_{2,1},$$

der

$$M_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, M_{1,2} = M_{1,3} = O$$

og

$$M_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får derfor at

$$F_1 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \text{ og } F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

med $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -1$. For $F_1' = F_1$ får vi følgende

Steg 1: Alle de utvidede kolonnene blir valgte utvidede kolonner fordi alle er like lange med lengde $r = 2$.

Steg 2: De valgte initialvektorene er lineært avhengige.

Steg 3: Vi adderer utvided kolonne 2 til de utvidede kolonnene 1 og 3. Vi legger utvidet kolonne 4 til den utvidede kolonnen 5 og får

$$F_1 \sim^* \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] = F_1'.$$

Steg 4: Fra de utvidede kolonnene 2 og 4 får vi Jordan kjedene $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ og $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ som vi legger inn i C', og får at

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Steg 5: Det er to valgte utvidede kolonner. Da får vi at

$$J' = J' \oplus J_2(1) \oplus J_2(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Steg 6: Vi har lagt til fire kolonner i C'. Egenverdien $\lambda_1 = 1$ har multiplisitet $n_1 = 4$, så vi er ferdige med F_1' og hopper til **Steg 10**.

Steg 10: Vi setter $i = 2$, og gjentar algoritmen for F_2.

For $F_2' = F_2$ får vi følgende

Steg 1: Alle de utvidede kolonnene blir valgte utvidede kolonner fordi alle er like lange med lengde $r = 1$.

Steg 2: De valgte initialvektorene er lineært avhengige.

Steg 3: Ved kolonneoperasjoner får vi

$$F_2 \sim^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F_2'.$$

Steg 4: Fra utvidet kolonne 5 får vi Jordan kjeden $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ som vi legger inn i C', og får at

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Steg 5: Det er en valgt utvidet kolonne. Vi får

$$J' = J' \oplus J_1(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Steg 6: Egenverdien $\lambda_2 = -1$ har multiplisitet $n_2 = 1$, så vi er ferdige med F_2' og hopper til **Steg 10**.

Steg 10: Siden $i = 2 = s$ er algoritmen ferdig. Matrisen $C = C'$ skal da være en Jordan basis matrise for E, og $J = J'$ er slik at $C^{-1}EC = J$.

Matrisen C er invertibel siden $det(C) = -1 \neq 0$, så vi kan se at J faktisk er similær med E ved at $EC = CJ$.

$$DC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

mens

$$CJ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

Eksempel 3.8. La

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{bmatrix}.$$

Da er det karakteristiske polynomet $p_G(\lambda) = (\lambda+1)^4$ og

$$e^{Gt} = e^{-t}M_{1,0} + te^{-t}M_{1,1} + t^2e^{\cdot t}M_{1,2} + t^3e^{-t}M_{1,3},$$

der

$$M_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ M_{1,1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -10 \end{bmatrix},$$

$$M_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \ og\ M_{1,3} = O.$$

Vi får derfor at

$$F_1 = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

med $\lambda_1 = -1$. For $F_1' = F_1$ får vi følgende

Steg 1: Alle de utvidede kolonnene blir valgte utvidede kolonner fordi alle er like lange med lengde $r = 3$.

Steg 2: De valgte initialvektorene er lineært avhengige.

Steg 3: Vi adderer (-2)*utvidet kolonne 3 til utvidet kolonne 1. Vi adderer utvidet kolonne 3 til de utvidede kolonnene 2 og 4. Da får vi

$$F_1 \sim^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -7 & 1 & 11 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = F_1'.$$

Steg 4: Fra utvidet kolonne 3 får vi Jordan kjeden $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ som vi legger inn i C', og får at

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 11 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Steg 5: Det er en valgt utvidet kolonne. Da får vi at

$$J' = J' \oplus J_3(-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Steg 6: Egenverdien $\lambda_1 = -1$ har multiplisitet $n_1 = 4$, så vi er ikke ferdige med F_1' og går videre til **Steg 7**.

Steg 7: Vi markerer utvidet kolonne 3, fordi vi har hentet en Jordan kjede fra den. Jeg velger å markere de utvidede kolonnene vi har hentet Jordan kjeder fra med grått.

Vi får

$$F_1 \sim^* \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -7 & 1 & 11 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] = F_1'.$$

Steg 8: Den markerte utvidede kolonnen har lengde 3. De utvidede kolonnene 1, 2 og 4 er nest lengst med lengde 2. Vi får derfor at differansen $d = 1$.

Steg 9: Vi fjerner den øverste vektoren i den markerte utvidede kolonnen og flytter resten ett hakk opp. Vi får

$$F_1 \sim^* \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] = F_1'.$$

Så hopper vi tilbake til **Steg 1**.

Steg 1: Alle de utvidede kolonnene blir valgte utvidede kolonner fordi alle er like lange med lengde 2.

Steg 2: De valgte initialvektorene er lineært avhengige.

Steg 3: Vi gjør kolonneoperasjoner til vi kun sitter igjen med lineært uavhengige valgte initialvektorer. Husk at vi ikke har lov til å endre den markerte kolonnen. Vi legger 7*utvidet kolonne 2 til utvidet kolonne 1. Så legger vi (-1)*utvidet kolonne 2 til utvidet kolonne 4. Til siste legger vi utvidet kolonne 3 til utvidet kolonne 2.

Vi får

$$F_1 \sim^* \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & -5 & -1 \\ 5 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & 11 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] = F_1'.$$

Steg 4: Alle de valgte initialvektorene som ikke er i markerte utvidede kolonner er blitt nullet ut. Det er derfor ingen kolonner å legge til i C'.

Steg 5: Det blir da heller ingen endringer i J'.

Steg 6: Vi har enda ikke lagt 4 kolonner inn i C', så vi er ikke ferdige med F_1' og går videre til **Steg 7**.

Steg 7: Vi har fortsatt kun hentet en Jordan kjede, som var fra utvidet kolonne 3. Vi markerer derfor fortsatt kun utvidet kolonne 3.

Steg 8: Den markerte utvidede kolonnen har lengde 2. De utvidede kolonnene 1, 2 og 4 er nest lengst med lengde 1. Vi får derfor at differansen $d = 1$.

Steg 9: Vi fjerner den øverste vektoren i den markerte utvidede kolonnen og flytter resten ett hakk opp. Vi får

$$F_1 \sim^* \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 1 \end{bmatrix} = F_1'.$$

Så hopper vi tilbake til **Steg 1**.

Steg 1: Alle de utvidede kolonnene blir valgte utvidede kolonner fordi alle er like lange med lengde 1.

Steg 2: De valgte initialvektorene er lineært avhengige.

Steg 3: Vi legger 11*utvidet kolonne 3 til utvidet kolonne 2. Så legger vi (-1)*utvidet kolonne 1 til utvidet kolonne 2. Til siste legger vi utvidet kolonne 3 til utvidet kolonne 4. Vi får

$$F_1 \sim^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = F_1'.$$

Steg 4: Fra utvidet kolonne 1 får vi Jordan kjeden $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ som vi legger inn i C', og får at

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 11 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Steg 5: Det er en valgt utvidet kolonne. Vi får

$$J' = J' \oplus J_1(-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Steg 6: Vi har lagt 4 kolonner inn i C', så vi er ferdige med F_1' og hopper til **Steg 10**.

Steg 10: Siden $i = 1 = s$ er algoritmen ferdig. Matrisen $C = C'$ skal da være en Jordan basis matrise for G, og $J = J'$ er slik at $C^{-1}GC = J$.

Matrisen C er invertibel siden $det(C) = -1 \neq 0$, så vi kan se at J faktisk er similær med G ved at $GC = CJ$.

$$GC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 11 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 1 & -12 & 11 & 0 \end{bmatrix},$$

mens

$$CJ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 11 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 1 & -12 & 11 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

3.4 Bevis for at algoritmen er gyldig[4]

Vi har nå sett at Algoritme 1 finner en Jordan basis matrise for de fire matrisene i de fire foregående eksemplene. Vi skal om litt bevise at algoritmen alltid vil føre frem til en Jordan basis matrise, men først skal vi kommentere et par ting ved algoritmen.

Kolonneoperasjonene

Bruk kun de valgte kolonnene:

Det er kun lov til å bruke de valgte utvidede kolonnene i kolonneoperasjonene fordi de har samme lengde. For at algoritmen skal fungere må det være slik at de utvidede kolonnene som er endret i kolonneoperasjonene fremdeles representerer Jordan kjeder. Vi skal nå se at når vi kun tillater kolonneoperasjoner mellom de valgte utvidede kolonnene er dette kravet tilfredstilt.

Bevis. Anta at de valgte utvidede kolonnene har lengde r for en $r \in \{1,...,n_l\}$, da representerer de Jordan kjeder med lengde r. Anta videre at p og q er generatorene i de to valgte utvidede kolonnene C_p og C_q. Hvis vi nå ved kolonneoperasjoner legger δC_q til C_p vil den endrede utvidede kolonnen inneholde vektorene

$$p_1 + \delta q_1, ..., p_{r-1} + \delta q_{r-1}, p_r + \delta q_r.$$

Vi skal vise at dette også representerer en Jordan kjede med lengde mindre eller lik r. Vi har at

$$(A - \lambda_l I_n)(p_i + \delta q_i) = (A - \lambda_l I_n)p_i + \delta(A - \lambda_l I_n)q_i = p_{i-1} + \delta q_{i-1}$$

for en $i \in \{2, ..., r\}$, mens

$$(A - \lambda_l I_n)(p_1 + \delta q_1) = (A - \lambda_l I_n)p_1 + \delta(A - \lambda_l I_n)q_1 = 0.$$

Dette beviser at kolonneoperasjoner mellom de valgte utvidede kolonnene enten nuller ut den endrede utvidede kolonnen eller bevarer egenskapen at de utvidede kolonnene representerer Jordan kjeder. □

Hvis p_1 og q_1 er lineært uavhengige ser vi at $p_1 + \delta q_1 \neq 0$, så lengden på den nye Jordan kjeden er også r. Er derimot p_1 og q_1 lineært avhengige vil vi alikevel ha egenskapen at

$$(A - \lambda_l I_n)(p_i + \delta q_i) = p_{i-1} + \delta q_{i-1},$$

som betyr at den endrede utvidede kolonnen enten er nullet ut eller en Jordan kjede med lengde mindre eller lik r. Er $p_1 + \delta q_1 = 0$ så vil lengden være mindre enn r.

[4]Kilder: [2, 7].

Utvidede kolonner som blir fjernet fra de valgte utvidede kolonnene:

Når en initialvektor nulles ut fjerner vi den tilhørende utvidede kolonnen fra de valgte utvidede kolonnene. Dette gjør vi fordi den da ikke lenger har samme lengde som de andre valgte utvidede kolonnene.

Det er ikke lov til å endre på de markerte kolonnene:

En markert kolonne er en kolonne det er hentet Jordan kjede fra. Ett av kravene for at man skal kunne hente en Jordan kjede fra en utvidet kolonne er at initialvektoren ikke er en lineær kombinasjon av de initialvektorene som allerede er plukket ut og lagt i C'. Hadde vi endret en markert kolonne kunne vi ved algoritmen endt opp med lineært avhengige initialvektorer i C'.

Lengde-endringen av de markerte utvidede kolonnene:

I algoritmen så ønsker vi å nulle ut initialvektorer som er lineært avhengige, men samtidig bevare egenskapen at de utvidede kolonnene representerer Jordan kjeder. For å oppnå dette må de utvidede kolonnene vi foretar kolonneoperasjoner med være like lange. Når vi flytter vektorene i en markert utvidet kolonne oppover, så vil fremdeles den utvidede kolonnen representerer en Jordan kjede. I tillegg vil det nå være mulig å nulle ut lineært avhengige initialvektorer i de utvidede kolonnene som var nest lengst før lengde endringen av de markerte utivdede kolonnene.

Rekkefølgen på kolonnene i C'

Vektorene som plasseres som kolonner i C' representerer Jordan kjeder. De plasseres i rekkefølgen gitt i algoritmen for at kolonnene i C skal gi en Jordan basis.

Lemma 3.17. *For hver $l \in \{1,...,s\}$ la $dim(K_l) = m_l$. Da er*

$$m_l = n_l.$$

Dette er et kjent resultat fra blant annet [2]. Beviset for Lemma 3.17 bruker noe teori fra [2] som ikke er bevist i denne oppgaven.

Bevis. Fra Korollar 3.6 vet vi at

$$I = e^O = e^{A0} = \sum_{l=1}^{s} M_{l,0}.$$

Hvis vi lar $p_l^{(j)}$ betegne kolonne nummer j i $M_{l,0}$ for $j \in \{1,...,n\}$ så er altså

$$\sum_{l=1}^{s} p_l^{(j)} = e_j,$$

der e_j er vektoren hvor alle elementer er null utenom element j som er 1. Det vil si at hvis

$$M = \left\{ p_l^{(j)} \mid l \in \{1,...,s\} \text{ og } j \in \{1,...,n\} \right\},$$

så er $\mathbb{C}^n \subset Span(M)$ og $\sum_{l=1}^{s} m_l \geq n$. Samtidig vet vi at dimensjonen av en mengde utspent av vektorer i C^n aldri kan være større en n. Vi må derfor nødvendigvis ha at

$$\sum_{l=1}^{s} m_l = n.$$

Vi skal nå bevise at hver $m_l \leq n_l$. Vi definerer restriksjonsavbildningen $T_l : K_l \to K_l$ som virker på K_l på samme måte som operatoren L_A der A er standardmatrisen. Dette kan vi gjøre fordi mengden K_l er invariant under A. T_l har kun λ_l som egenverdi, så det karakteristiske polynomet p_{T_l} må være gitt ved $p_{T_l}(t) = (t-\lambda_l)^{m_l}$. Så vet vi fra Lemma 3.16 at mengdene $K_1,...,K_s$ er lineært uavhengige som betyr at

$$L_A = T_1 \oplus ... \oplus T_s.$$

Da vil det karakteristiske polynomet $p_{T_l}(t)$ splitte

$$p_A(t) = (t-\lambda_1 I_n)^{n_1} ... (t-\lambda_l I_n)^{n_l} ... (t-\lambda_s I_n)^{n_s}.$$

Vi vet også at representasjonen gitt her av $P_A(t)$ er unik med unntakk av rekkefølgen på faktorene. Det betyr at $(t-\lambda_l)^{n_l} = (t-\lambda_l)^{m_l}(t-\lambda_l)^a$ for en $a \in \mathbb{N}_0$. Vi kan derfor konkludere at $m_l \leq n_l$, og får

$$n = \sum_{l=1}^{s} m_l \leq \sum_{l=1}^{s} n_l = n \Rightarrow m_l = n_l,$$

som beviser lemmaet. □

Lemma 3.18. *Når Algoritme 1 brukes på F_l vil matrisen C' bli fylt opp av n_l kolonnevektorer.*

Bevis. Fra Lemma 3.11 vet vi at $Col(M_{l,0}) = K_l$. Vi kaller den øverste kvadranten i den bearbeidede utvidede matrisen F_l' for $M_{l,0}'$. Vi lar

$$C_l' = \{v \mid v \text{ er lagt til som kolonne i } C' \text{ gjennom arbeidet med } F_l \text{ i algoritmen}\}.$$

Videre definerer vi $U' = Col(M_{l,0}')$ og $V' = Span(C_l')$. Da har vi at U' og V' kan endre seg flere ganger i løpet av algoritmen, men vi skal bevise at

$$W' = \{Span(v) \mid v \in U' \cup V'\}$$

allikevel vil være lik K_l etter hvert av stegene som endrer U' eller V'.

Steg 3: Her endres $M'_{l,0}$, men kun gjennom operasjoner som er lovlig i vanlige kolonneoperasjoner. Da vi vet at kolonneoperasjoner på en tilfeldig matrise B bevarer $Col(B)$, så vil ikke Steg 3 endre U'.

Steg 4: Her endres V', men kun ved å legge til vektorer som er med i K_l inn i C'_l. Hvis $W' = K_l$ før Steg 4, vil det også være det etterpå.

Steg 9: Her endres både U' og V'. Vi skal allikevel se at W' ikke vil endre seg. De vektorene som fjernes fra $M_{l,0}$ er lagt til som kolonner i C', som gjør at W' ikke vil endre seg. De vektorene som legges til $M_{l,0}$ ligger også som kolonner C', som gjør at W' ikke vil endres her heller. Da følger det at hvis $W' = K_l$ før Steg 9, så må det også være slik etterpå.

Algoritmen er ikke ferdig for F_l før det er lagt til n_l kolonnevektorer i C'. Siden $\dim(K_l) = n_l$ må derfor alle kolonner i $M_{l,0}$ som ikke er nullet ut enda være lineærkombinasjoner av kolonnene lagt til i C'. Da vil $V' = W'$, men $W' = K_l$ fordi den ikke endres i løpet av algoritmen. Da vet vi følgende:

- Kolonneoperasjonene beskrevet i Algoritme 1 resulterer i at $V' = K_l$.
- Alle kolonnevektorene som legges inn i C' er lineært uavhengige (Lemma 3.16).
- $Dim(K_l) = n_l$.

Da må logaritme 1 plukke ut n_l kolonnevektorer til C'. □

Lemma 3.19. *$n \times n$ matrisen C i Algoritme 1 vil bli fylt opp av n kolonnevektorer.*

Bevis. Fra Lemma 3.18 vet vi at det blir lagt til n_l kolonner i C' når Algoritme 1 brukes på F_l for alle $l \in \{1, ..., s\}$. Da blir det lagt til

$$n_1 + n_2 + ... + n_s = n$$

kolonnevektorer. Siden C' blir identisk med C når den er fylt opp med n kolonnevektorer er lemmaet bevist. □

Lemma 3.20. *Matrisen C i Algoritme 1 er invertibel.*

Bevis. Generatorene til Jordan kjedene som blir plukket ut med Algoritme 1 tilfredstiller kravene i Lemma 3.16. Da vet vi at kolonnevektorene i C er lineært uavhengige, og lemmaet er bevist. □

Teorem 3.21. *Matrisen C i Algoritme 1 er en Jordan basis matrise for A slik at $A = CJC^{-1}$, der J er Jordan matrisen funnet i Algoritme 1.*

Bevis. La antallet Jordan kjeder lagt til i C under Algoritme 1 være gitt ved $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq n$. Da er J en direkte sum av s Jordan blokker. For $l \in \{1, ..., s\}$ la γ_l betegne Jordan kjede nummer l sett fra venstre i C og med lengde $n_l \in \mathbb{N}$, $1 \leq n_l \leq n$. Vi lar $\lambda_l \in \mathbb{C}$ betegne egenverdien til A tilhørende Jordan kjeden γ_l. Legg merke til at dette betyr at λ_i og λ_j kan være like selv om $i \neq j$ for $i, j \in \{1, ..., s\}$. La $r_1 = 0$ og $r_l = n_1 + n_2 + ... + n_{l-1}$ når $l \geq 2$. La også

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_n \end{bmatrix},$$

der $C_1, C_2, ..., C_n$ er kolonnevektorer. Da er C_1 en initial vektor for en Jordan kjede med lengde n_1. Da vet vi fra Lemma 3.8 at

$$A \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_{n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 C_1 & C_1 + \lambda_1 C_2 & ... & C_{n_1 - 1} + \lambda_1 C_{n_1} \end{bmatrix}.$$

Men dette er det samme som

$$CJ_1 = C \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) \end{bmatrix} \\ O \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \\ O \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 C_1 & C_1 + \lambda_1 C_2 & ... & C_{n_1 - 1} + \lambda_1 C_{n_1} \end{bmatrix},$$

der J_l for alle $l \in \{1, ..., s\}$ er en $n \times n_l$ matrise gitt ved

$$\begin{bmatrix} O \\ \begin{bmatrix} J_{n_l}(\lambda_l) \end{bmatrix} \\ O \end{bmatrix}.$$

Den første ikke null radvektoren i J_l er rad nummer $r_l + 1$. Hva skjer når vi ser på flere Jordan kjeder. For en $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq s$ la oss se på de k første Jordan kjedene. Da vet vi fra Lemma 3.8 at

$$A \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_{n_1} & ... & C_{r_k+1} & C_{r_k+2} & ... & C_{r_k+n_k} \end{bmatrix}$$

$$= [\lambda_1 C_1 \quad C_1 + \lambda_1 C_2 \quad \dots \quad C_{n_1-1} + \lambda_1 C_{n_1} \quad \dots$$
$$\dots \quad \lambda_k C_{r_k+1} \quad C_{r_k+1} + \lambda_k C_{r_k+2} \quad \dots \quad C_{r_k+n_k-1} + \lambda_k C_{r_k+n_k}].$$

Men dette er det samme som

$$C\begin{bmatrix} J_1 & \dots & J_k \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} [J_{n_1}(\lambda_1)] & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & [J_{n_k}(\lambda_k)] \\ O & \dots & O \end{bmatrix}$$

$$= C \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \\ O & \dots & O \end{bmatrix}$$

$$= [\lambda_1 C_1 \quad C_1 + \lambda_1 C_2 \quad \dots \quad C_{n_1-1} + \lambda_1 C_{n_1} \quad \dots$$
$$\dots \quad \lambda_k C_{r_k+1} \quad C_{r_k+1} + \lambda_k C_{r_k+2} \quad \dots \quad C_{r_k+n_k-1} + \lambda_k C_{r_k+n_k}].$$

Da får vi at hvis $k = s$ så er J en Jordan matrise gitt ved

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & \dots & J_s \end{bmatrix} = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \dots \oplus J_{n_s}(\lambda_s).$$

Videre så er $AC = CJ$, som beviser teoremet. $\square$

3.5 Et eksempel på hele prosessen

Vi tar til slutt med et eksempel på hele prosessen fra en matrise $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ til vi har funnet en Jordan normalform for A ved hjelp av e^{At} for $t \in \mathbb{R}$.

La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

og sett $X(t)=e^{At}=[x_{ij}(t)]$ for $t\in\mathbb{R}$. Da er $p_A(t)=(t-3)(t-2)^3$, og $y=\{e^{3t},e^{2t},te^{2t},t^2e^{2t}\}$ er en basis for løsningsrommet til $p_A(d)x_{ij}(t)$. Wronski matrisen er gitt ved

$$W[y;t]=\begin{bmatrix} e^{3t} & e^{2t} & te^{2t} & t^2e^{2t} \\ 3e^{3t} & 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} & (2t^2+2t)e^{2t} \\ 9e^{3t} & 4e^{2t} & (4t+4)e^{2t} & (4t^2+8t+2)e^{2t} \\ 27e^{3t} & 8e^{2t} & (8t+12)e^{2t} & (8t^2+24t+12)e^{2t} \end{bmatrix},$$

som betyr at

$$W[y;0]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 4 & 2 \\ 27 & 8 & 12 & 12 \end{bmatrix} \text{ og } W[y;0]^{-1}=\begin{bmatrix} -8 & 12 & -6 & 1 \\ 9 & -12 & 6 & -1 \\ 6 & -11 & 6 & -1 \\ 6 & -8 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Koeffisientfunksjonene er gitt ved

$$\begin{bmatrix} \phi_0(t) & \phi_1(t) & \phi_2(t) & \phi_3(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{3t} & e^{2t} & te^{2t} & t^2e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 & 12 & -6 & 1 \\ 9 & -12 & 6 & -1 \\ 6 & -11 & 6 & -1 \\ 6 & -8 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

som medfører at

$$\phi_0(t)=-8e^{3t}+9e^{2t}+6te^{2t}+6t^2e^{2t},\ \phi_1(t)=12e^{3t}-12e^{2t}-11te^{2t}-8t^2e^{2t},$$

$$\phi_2(t)=-6e^{3t}+6e^{2t}+6te^{2t}+\frac{7}{2}t^2e^{2t} \text{ og } \phi_3(t)=e^{3t}-e^{2t}-te^{2t}-\frac{1}{2}t^2e^{2t}.$$

Videre ser vi at

$$A^2=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & -1 \\ -12 & 3 & 2 & 10 \\ 4 & -\frac{1}{2} & 5 & 0 \\ -6 & -4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \text{ og } A^3=\begin{bmatrix} 22 & -6 & 12 & -7 \\ -48 & 2 & 12 & 36 \\ 14 & -3 & 14 & -1 \\ -10 & -12 & 24 & 13 \end{bmatrix},$$

som gir at

$$e^{At}=\begin{bmatrix} \left(2e^{3t}-e^{2t}-2te^{2t}\right) & \left(-\frac{1}{2}te^{2t}\right) & \left(te^{2t}\right) & \left(-e^{3t}+e^{2t}+te^{2t}\right) \\ \left(-2te^{2t}-2t^2e^{2t}\right) & \left(e^{2t}-\frac{1}{2}t^2e^{2t}\right) & \left(t^2e^{2t}\right) & \left(2te^{2t}+t^2e^{2t}\right) \\ \left(2e^{3t}-2e^{2t}-te^{2t}-t^2e^{2t}\right) & \left(-\frac{1}{4}t^2e^{2t}\right) & \left(e^{2t}+\frac{1}{2}t^2e^{2t}\right) & \left(-e^{3t}+e^{2t}+te^{2t}+\frac{1}{2}t^2e^{2t}\right) \\ \left(2e^{3t}-2e^{2t}-4te^{2t}\right) & \left(-te^{2t}\right) & \left(2te^{2t}\right) & \left(-e^{3t}+2e^{2t}+2te^{2t}\right) \end{bmatrix}.$$

Da er

$$M_{1,0}=F_1=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$M_{2,0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, M_{2,1} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

og

$$M_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

som gir

$$F_2 = \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ \hline -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi er da klare for å begynne på algoritmen for å finne en Jordan basis for A. For $F_1' = F_1$ får vi følgende

Steg 1: Utvidet kolonne 1 og 4 blir valgte utvidede kolonner med lengde $r = 1$.

Steg 2: De valgte initialvektorene er lineært avhengige.

Steg 3: Ved kolonneoperasjoner får vi

$$F_1 \sim^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F_1'.$$

Legg merke til at vi har skallert ned utvidet kolonne 1. Vi kunne latt den forbli lik $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$. Dette gjør vi fordi det er hensiktsmessig å gjøre de valgte Jordan kjedene så *enkle* som mulig.

Steg 4: Fra utvidet kolonne 1 får vi Jordan kjeden $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ som vi legger inn i C', og får at

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Steg 5: Det er en valgt utvidet kolonne. Da får vi at

$$J' = J' \oplus J_1(3) = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

Steg 6: Egenverdien $\lambda_1 = 3$ har multiplisitet 1, så vi er ferdige med F_1' og hopper til **Steg 10**.

Steg 10: Vi setter $i = 2$, og gjentar algoritmen for F_2.

For $F_2' = F_2$ får vi følgende

Steg 1: Alle de utvidede kolonnene blir valgte utvidede kolonner fordi alle er like lange med lengde $r = 3$.

Steg 2: De valgte initialvektorene er lineært avhengige.

Steg 3: Vi legger 2*utvidet kolonne 3 til utvidet kolonne 1. Så legger vi $\frac{1}{2}$*utvidet kolonne 3 til utvidet kolonne 2. Til sist trekker vi utvidet kolonne 3 fra utvidet kolonne 4. Da får vi

$$F_2 \sim^* \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = F_2'.$$

Steg 4: Fra utvidet kolonne 3 får vi Jordan kjeden $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ som vi legger inn i C', og får at

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Steg 5: Det er en valgt utvidet kolonne. Da får vi at

$$J' = J' \oplus J_3(2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Steg 6: Egenverdien $\lambda_2 = 2$ har multiplisitet 3, så vi er ferdige med F_2' og hopper til **Steg 10**.

Steg 10: Siden $i = 2$ og A har 2 egenverdier er algoritmen ferdig. Matrisen $C = C'$ skal da være en Jordan basis matrise for A, og $J = J'$ er slik at $C^{-1}AC = J$.

Vi kan se at J faktisk er similær med A ved at $AGC = CJ$.

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

mens

$$CJ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.6 Avslutningskommentarer

Vi har nå sett at vi kan finne en Jordan normalform for en $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ved å bruke eksponentialmatrisefunksjonen $X(t) = e^{At}$ for $t \in \mathbb{R}$. Dette fungerer fint når A er relativt liten. Når A blir større kommer vi derimot til å bli avhengige av numeriske verktøy. Da vil det bli et problem å beregne egenverdiene til A nøyaktig. Hvis det numeriske verktøyet finner to egenverdier som er nær hverandre i verdi, vil det være vannskelig å bedømme om forskjellen er et resultat av den numeriske algoritmen, eller om det faktisk er to distinkte egenverdier. For at metoden gitt i Kapittel 3 skal føre frem er vi avhengige av at egenverdiene og deres multiplisitet er kjente.

Bibliografi

[1] T. M. Apostol. *Calculus Volume II*. 2. utg. Xerox College Publishing, 1969.

[2] E. C. Bédos. “Rom og lineæritet”. Notater til Mat4000 ved UiO. 2012.

[3] J. R. Cardoso og F. S. Leite. “Exponentials of skew-symmetric matrices and logarithms of orthogonal matrices”. I: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233 (2010), s. 2867–2875.

[4] C.H. Edwards og D.E. Penney. *Elementary differential equations - With boundary value problems*. 6. utg. Pearson, 2009.

[5] S. H. Friedberg, A. J. Insel og L. E. Spence. *Linear Algebra*. 4. utg. Prentice Hall, 2003.

[6] J. Gallier og D. Xu. “Computing exponentials of skew-symmetric matrices and logarithms of orthogonal matrices”. I: *International Journal of Robotics and Automation* 17 (2002).

[7] J.-Y. Han og C.-Y. Lin. “A new proof of Jordan canonical forms of a square matrix”. I: *Linear and Multilinear Algebra* 57 (jun. 2009), s. 369–386.

[8] N. J. Higham. *Functions of Matrices - Theory and Computation*. 1. utg. Siam, 2008.

[9] D. C. Lay. *Linear Algebra and Its Applications*. 3. utg. Pearson Addison Wesley, 2006.

[10] T. Lindstrøm. *Kalkulus*. 3. utg. Universitetsforlaget, 2006.

[11] J.P. Fillmore W.A Harris og D. R. Smith. “Matrix exponentials - Another approach”. I: *SIAM Review* 43 (2001), s. 694–706.